RAPPELS DES CLASSES ANTÉRIEURES

Calcul numérique

Les priorités opératoires

• **Pour calculer une expression sans parenthèses**, on effectue d'abord les puissances, puis les multiplications et les divisions, enfin les additions et les soustractions.

Exemple

$5-2\times 3^2=5-2\times 9=5-18=-13$

• **Pour calculer une expression avec des parenthèses**, on effectue d'abord les calculs entre parenthèses.

Exemple

$(6-2^3)\times 5=(6-8)\times 5=-2\times 5=-10$

Les fractions

a, b, c, d, k désignent des nombres ($c\neq 0$, $d\neq 0$, $k\neq 0$).

• $\dfrac{a}{c}=\dfrac{k\times a}{k\times c}$ • $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}=\dfrac{a+b}{c}$ • $\dfrac{a}{c}-\dfrac{b}{c}=\dfrac{a-b}{c}$ • $\dfrac{a}{c}\times\dfrac{b}{d}=\dfrac{a\times b}{c\times d}$ • $a\times\dfrac{b}{c}=\dfrac{a\times b}{c}$ • $\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}$ $(b\neq 0)$

Exemples

• Pour additionner ou soustraire deux fractions de dénominateurs différents, on commence par les écrire avec le même dénominateur.

$\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3\times 2}{2\times 2}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{6}{4}=\dfrac{7}{4}$

• $\dfrac{2}{7}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{2\times 3}{7\times 4}=\dfrac{2\times 3}{7\times 2\times 2}=\dfrac{3}{14}$ • $\dfrac{1}{5}:\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{10}$

Les puissances de 10 et les préfixes

$10^0=1$ et pour tout entier n, $n\geqslant 1$,

• $10^n=1\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ zéros}}$ • $10^{-n}=\dfrac{1}{10^n}=\dfrac{1}{1\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ zéros}}}=\underbrace{0{,}0\ldots0}_{n\text{ zéros}}1$

Exemples

$10^6=1\,000\,000$ $10^{-6}=0{,}000\,001$

Préfixe	giga	méga	kilo	unité	milli	micro	nano
Symbole	G	M	k		m	µ	n
10^n	10^9	10^6	10^3	$10^0=1$	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

Les puissances entières d'un nombre

Pour tous nombres non nuls a et b, pour tous entiers n et p,

• $a^n=\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n\text{ fois}}$ $(n\geqslant 1)$ et $a^0=1$.

• $a^n\times a^p=a^{n+p}$ • $\dfrac{a^n}{a^p}=a^{n-p}$ • $(a^n)^p=a^{n\times p}$ • $a^n\times b^n=(ab)^n$ • $\dfrac{a^n}{b^n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Les racines carrées

• Pour tout nombre **positif** a, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est a.
Ainsi, $\sqrt{a}\geqslant 0$ et $(\sqrt{a})^2=a$.

• Pour tous nombres positifs a et b, $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ et $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b\neq 0)$.

Les ensembles de nombres

Ensemble des nombres : • entiers naturels : $\mathbb{N}$ • entiers relatifs : $\mathbb{Z}$ • décimaux : $\mathbb{D}$ • rationnels : $\mathbb{Q}$

• réels : $\mathbb{R}$ (un nombre réel non rationnel est dit **irrationnel** : $\sqrt{2}$, π, …)

Ensemble des nombres réels x	Représentation	Intervalle
$a \leqslant x \leqslant b$		$[a\,;\,b]$
$a \leqslant x < b$		$[a\,;\,b[$
$x < b$		$]-\infty\,;\,b[$
$x \geqslant a$		$[a\,;\,+\infty[$

• $\mathbb{R} =]-\infty\,;\,+\infty[$ • $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;\,0[\ \cup\ ]0\,;\,+\infty[$ • $\mathbb{R} - \{1\} =]-\infty\,;\,1[\ \cup\ ]1\,;\,+\infty[$

Calcul littéral

Développement – Factorisation

a, b, c, d, k désignent des nombres.

Développer

$$k(a+b) = ka + kb$$
$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Factoriser

Équation du premier degré

• Résoudre l'équation $x + 1 = 3x + 5$

$$x + 1 - 3x = 3x + 5 - 3x$$
$$-2x + 1 - 1 = 5 - 1$$
$$\frac{-2x}{-2} = \frac{4}{-2}$$
$$x = -2$$

On regroupe tous les termes en x dans un membre.

L'équation a pour seule solution -2.

Équation produit nul

a, b, c, d désignent des nombres.

• Les solutions d'une équation produit nul :

$$(ax+b)(cx+d) = 0$$

sont les nombres x tels que :

$$ax + b = 0 \text{ ou } cx + d = 0.$$

Équation $x^2 = a$

a désigne un nombre.

• Si $a > 0$, l'équation admet exactement deux solutions, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

• Si $a = 0$, l'équation admet une solution, 0.

• Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution.

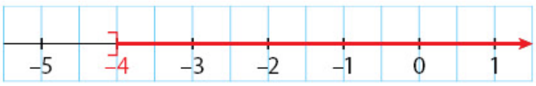
Inéquation du premier degré

• Résoudre l'inéquation $2x - 3 < 5x + 9$

$$2x - 3 - 5x < 5x + 9 - 5x$$
$$-3x - 3 + 3 < 9 + 3$$
$$\frac{-3x}{-3} > \frac{12}{-3}$$
$$x > -4$$

On regroupe tous les termes en x dans un membre.

On peut représenter l'ensemble des solutions sur une droite graduée.



L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-4\,;\,+\infty[$.

Signe de $ax + b$

• **Cas où $a > 0$**

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		$-$	0	$+$	

• **Cas où $a < 0$**

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		$+$	0	$-$	

Signe du produit $(2x+3)(-x+2)$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
Produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(2x+3)(-x+2) \geqslant 0$ est l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}\,;\,2\right]$.

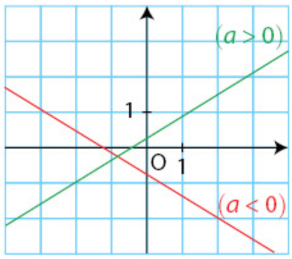
Signe du quotient $\dfrac{2x+3}{-x+2}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
Quotient		$-$	0	$+$	‖	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{2x+3}{-x+2} \geqslant 0$ est l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}\,;\,2\right[$.

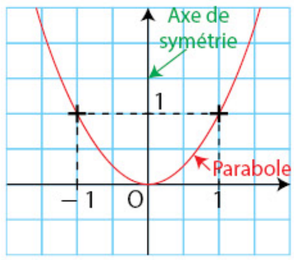
Fonctions

Fonction affine $f : x \mapsto ax + b$



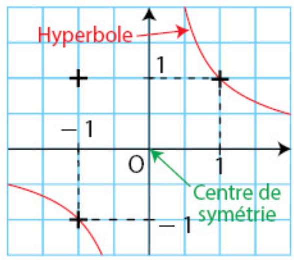
Si $a > 0$, f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a < 0$, f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Fonction carré $f : x \mapsto x^2$



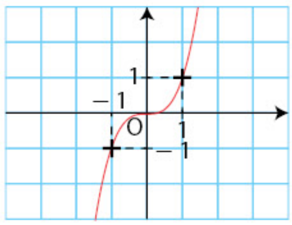
f est décroissante sur $]-\infty\,;0]$
et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$



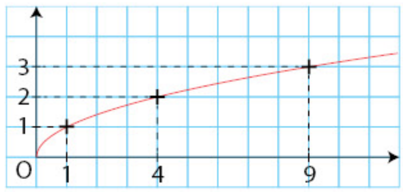
f est décroissante sur $]-\infty\,;0[$
et décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

Fonction cube $f : x \mapsto x^3$



f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Fonction racine carrée $f : x \mapsto \sqrt{x}$



f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Traitement de données

Pourcentage

• Prendre 15 % de 60 € c'est calculer :
$\dfrac{15}{100} \times 60\text{ €} = 0{,}15 \times 60\text{ €} = 9\text{ €}$

• Dans une classe 7 élèves sur 28 sont gauchers.
Le pourcentage de gauchers dans cette classe est 25 %.
En effet : $\dfrac{7}{28} = \dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{100}$.

Lire et représenter des données

• L'**effectif** d'une donnée est le nombre de fois où elle apparaît dans une liste. L'effectif total est le nombre total de données dans la liste.

• **Fréquence** d'une donnée : $\dfrac{\text{effectif de la donnée}}{\text{effectif total}}$
Une fréquence s'exprime à l'aide d'un nombre décimal ou d'une fraction ou d'un pourcentage.

Exemple

Nombre d'apparitions d'une lettre dans le mot STATISTIQUES. L'effectif total est 12.
La fréquence d'apparition de la lettre I est $\dfrac{2}{12}$ soit $\dfrac{1}{6}$, ou environ 17 %.

Lettre	S	T	A	I	Q	U	E
Effectif	3	3	1	2	1	1	1

• Pour représenter des données, on utilise différents types de diagrammes.

Diagramme en bâtons

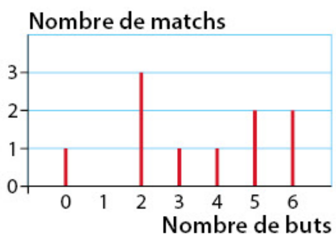


Diagramme en barres

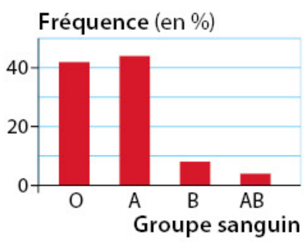
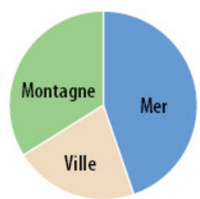


Diagramme circulaire



Taux d'évolution

- Dire qu'il y a une évolution de t % entre une valeur initiale V_0 (non nulle) et une valeur finale V_1 signifie que :

$$\mathbf{V_1 = V_0\left(1 + \frac{t}{100}\right)}.$$

Exemple

Un grossiste propose une réduction de 4 % à un artisan dont la facture s'élève à 24 500 €.

$24\,500\text{ €} \times \left(1 - \frac{4}{100}\right) = 24\,500\text{ €} \times 0{,}96 = 23\,520\text{ €}$

Donc l'artisan paiera finalement 23 520 €.

- Le taux d'évolution d'une valeur initiale V_0 (non nulle) à une valeur finale V_1 est $\mathbf{\frac{V_1 - V_0}{V_0}}$.

Exemple

De 2010 à 2020 la population d'un village est passée de 950 à 1 000 habitants.

$\frac{1\,000 - 950}{950} = \frac{50}{950}$, soit environ 0,053. Donc cette population a augmenté d'environ 5,3 %.

- Si une valeur évolue d'abord de t_1 % puis encore de t_2 %, alors cette valeur évolue globalement de t % avec :

$$\mathbf{1 + \frac{t}{100} = \left(1 + \frac{t_1}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t_2}{100}\right)}.$$

Probabilités

E : univers d'une expérience aléatoire

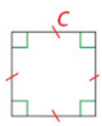
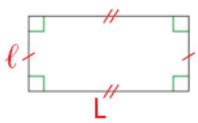
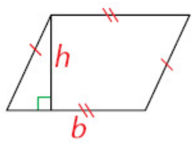
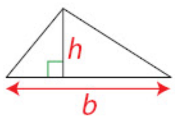
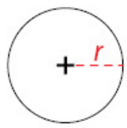
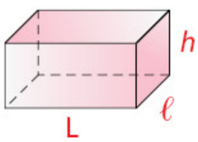
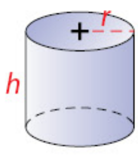
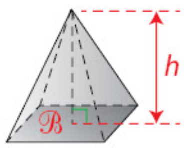
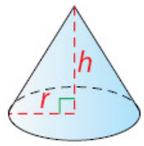
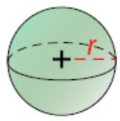
Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre d'issues de E}}.$$

Pour tous événements A et B,

- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ où $\overline{A}$ est l'événement contraire de A.

Longueurs, aires et volumes

Carré	Rectangle	Parallélogramme	Triangle	Cercle, disque
				
Aire : $\mathscr{A} = c^2$	Aire : $\mathscr{A} = L \times \ell$	Aire : $\mathscr{A} = b \times h$	Aire : $\mathscr{A} = \frac{b \times h}{2}$	Longueur : $L = 2\pi r$ Aire : $\mathscr{A} = \pi r^2$
Pavé droit	**Cylindre**	**Pyramide**	**Cône**	**Boule**
				
Volume : $\mathscr{V} = L \times \ell \times h$	Volume : $\mathscr{V} = \pi r^2 h$	Volume : $\mathscr{V} = \frac{1}{3}\mathscr{B}h$	Volume : $\mathscr{V} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	Volume : $\mathscr{V} = \frac{4}{3}\pi r^3$

MÉMO DE PREMIÈRE

Analyse de l'information chiffrée

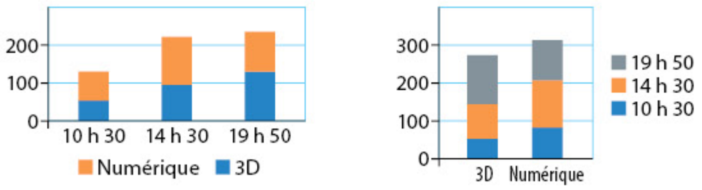
Tableau croisé d'effectifs

Sur la population des spectateurs d'une salle de cinéma une journée donnée, on étudie **deux caractères** : la séance à laquelle ils ont assisté et le type de projection.
Ce **tableau croisé** (ou à double entrée) présente les résultats.
Les ligne et colonne « Total » sont **les marges** du tableau.

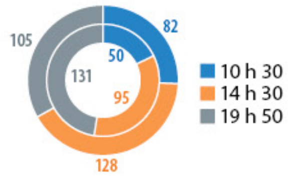
	3D	Numérique	Total
10 h 30	50	82	132
14 h 30	95	128	223
19 h 50	131	105	236
Total	276	315	591

Représentation graphique d'un tableau croisé

Un diagramme en barres cumulées



Un diagramme circulaire en anneaux



Fréquence marginale

À partir du tableau d'effectifs ci-dessus, on peut réaliser le tableau des fréquences (ici, arrondies au centième).
Les fréquences qui figurent dans les ligne et colonne « Total » sont appelées des **fréquences marginales**.
La fréquence marginale de la séance de 10 h 30 est :

$$\frac{132}{591} \approx 0{,}22.$$

	3D	Numérique	Total
10 h 30	0,08	0,14	0,22
14 h 30	0,16	0,22	0,38
19 h 50	0,22	0,18	0,40
Total	0,46	0,54	1

Fréquence conditionnelle

Parmi les 132 spectateurs de la séance de 10 h 30, 50 ont vu le film en 3D. On dit que **la fréquence conditionnelle** de la projection en 3D **parmi** les spectateurs de la séance de 10 h 30 est : $\frac{50}{132} \approx 0{,}38$.
Voici le tableau des fréquences conditionnelles :

- en ligne

	3D	Numérique	Total
10 h 30	0,38	0,62	1
14 h 30	0,43	0,57	1
19 h 50	0,56	0,44	1

- en colonne

	3D	Numérique
10 h 30	0,18	0,26
14 h 30	0,34	0,41
19 h 50	0,48	0,33
Total	1	1

Phénomènes aléatoires

Probabilité conditionnelle

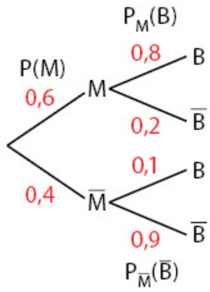
A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité conditionnelle de B sachant A, notée $P_A(B)$, est définie par : $\mathbf{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$.
On en déduit que : $\mathbf{P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)}$.

Événements indépendants

Dire que deux événements A et B sont **indépendants** signifie que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Arbre pondéré par des probabilités

Une population d'individus a un taux anormalement élevé de glycémie.
À 60 % d'entre eux on donne un médicament (M) et aux 40 % restants on donne un placebo.
On constate une baisse de glycémie (B) chez 80 % de ceux qui reçoivent le médicament et chez 10 % de ceux qui reçoivent le placebo.
On choisit au hasard la fiche d'un individu de cette population.
On peut représenter cette situation par l'arbre pondéré ci-contre où :
– sur le 2^{e} niveau de branches figurent des **probabilités conditionnelles** ;
– sur les branches issues **d'un même nœud**, la **somme** des probabilités est **égale à 1**.



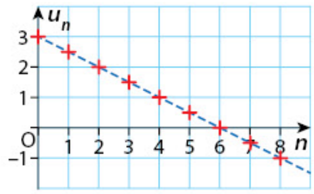
Phénomènes d'évolution : croissance linéaire

Suites arithmétiques

▸ Dire qu'une suite (u_n) est **arithmétique de raison *r*** signifie que l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant r.
En d'autres termes : pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$.
Alors, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$.

▸ Une suite arithmétique de raison r est :
• croissante si $r > 0$; • constante si $r = 0$; • décroissante si $r < 0$.

▸ Dans un repère, la représentation graphique d'une suite arithmétique (u_n) de raison r est le nuage de points de coordonnées $\boldsymbol{(n\ ;\ u_n)}$.
Ces points appartiennent à **la droite** d'équation $y = rx + u_0$.



Ici, $r = -0{,}5$ donc $r < 0$.

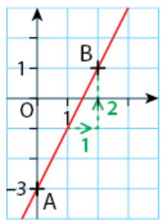
Fonctions affines

▸ Une fonction **affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$ où a et b désignent des nombres réels donnés.
Dans un repère, sa représentation graphique est une **droite**.
On dit que a est **le coefficient directeur** de cette droite
et que b est son **ordonnée à l'origine**.

▸ Sur $\mathbb{R}$, une fonction affine est :
• croissante si $a > 0$; • constante si $a = 0$; • décroissante si $a < 0$.

▸ Pour une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$, les accroissements de x et de $f(x)$ sont **proportionnels**, le coefficient de proportionnalité est a.
En d'autres termes, pour tous réels x_1 et x_2, $\boldsymbol{f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)}$.
Ainsi, lorsque $x_2 \neq x_1$, $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$ et on dit que **le taux d'accroissement de *f* entre x_1 et x_2** est égal au **coefficient directeur de la droite** représentative de f dans un repère.

$f : x \mapsto 2x - 3$ ($a = 2$, $b = -3$)
La droite passe par A(0 ; –3) et B(2 ; 1).



Quand x augmente de 1, $f(x)$ augmente de 2.

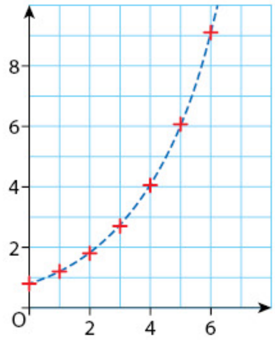
Phénomènes d'évolution : croissance exponentielle

Suites géométriques à termes strictement positifs

▸ Dire qu'une suite (u_n) est **géométrique de raison *q***, signifie que l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par q. En d'autres termes : pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n}$.
Alors, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n = u_0\, q^n}$.

▸ Une suite géométrique de raison q à termes strictement positifs est :
• croissante si $q > 1$; • constante si $q = 1$; • décroissante si $0 < q < 1$.

▸ Dans un repère, les points de coordonnées $(n\,;\,u_n)$ de la représentation graphique d'une suite géométrique (u_n) de raison q appartiennent à la courbe représentative de **la fonction exponentielle** $x \mapsto u_0\,q^x$.



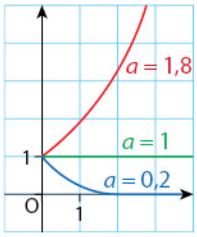
Ici, $u_0 = 0{,}8$ et $q = 1{,}5$.

Fonctions exponentielles

▸ **La fonction exponentielle de base *a***, avec $a > 0$, est la fonction $x \mapsto a^x$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
Pour calculer a^x on peut utiliser la touche ^ de la calculatrice.

▸ Pour tous réels a et b, avec $a > 0$ et $b > 0$, et pour tous réels positifs x et y :

$$\boldsymbol{a^0 = 1 \qquad a^1 = a \qquad a^x \times a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad (a^x)^y = a^{x \times y} \qquad (ab)^x = a^x b^x \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}}$$



▸ Sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la fonction exponentielle de base a est :
• croissante si $a > 1$; • constante si $a = 1$; • décroissante si $0 < a < 1$.

▸ Pour tout réel a, avec $a > 0$, et pour tout entier naturel non nul n, on note $\boldsymbol{a^{\frac{1}{n}}}$ le nombre qui élevé à la puissance n, donne a. Ainsi, $\boldsymbol{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a}$.
Ce nombre est **la racine *n*-ième de *a***, on le note aussi $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$.

▸ **Le taux d'évolution moyen** correspondant à n évolutions successives de taux global T est le nombre t tel que $\boldsymbol{(1 + t)^n = 1 + \mathrm{T}}$.

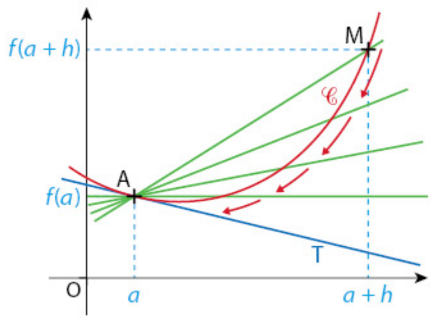
Exemple

En 3 ans, le prix d'un article a augmenté de 20 %. Le taux d'augmentation moyen annuel t du prix de cet article vérifie $(1 + t)^3 = 1 + \dfrac{20}{100}$. Ainsi, $1 + t = 1{,}2^{\frac{1}{3}}$, soit $t = 1{,}2^{\frac{1}{3}} - 1$, c'est-à-dire $t \approx 6{,}3$ %.

Variation instantanée, variation globale

Variation instantanée (nombre dérivé)

f est une fonction définie sur un intervalle et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthogonal. A est le point d'abscisse a de $\mathscr{C}$.
Lorsqu'un point M de la courbe $\mathscr{C}$ se rapproche de plus en plus du point A, la sécante (AM) se rapproche d'une droite **T** appelée **la tangente** à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
Le coefficient directeur de la sécante (AM) est le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ (avec $h \neq 0$), à savoir $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Lorsque M se rapproche de A, ce taux d'accroissement se rapproche du coefficient directeur de la tangente T (lorsque T n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées), appelé **le nombre dérivé de *f* en *a*** et noté $\boldsymbol{f'(a)}$.



Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse a est $\boldsymbol{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$.

Variation globale (fonction dérivée)

▸ f est une fonction définie sur un intervalle I.
La fonction qui à tout nombre réel x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée **la fonction dérivée** de f et est notée $\boldsymbol{f'}$.

▸ Voici les fonctions dérivées de certaines fonctions usuelles.

	Fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par ...	**Fonction dérivée f' définie sur $\mathbb{R}$ par ...**
Fonction constante	$f(x) = k$ avec k nombre réel	$f'(x) = 0$
Fonction identité	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Fonction carré	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
Fonction cube	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

▸ u et v désignent des fonctions dérivables sur un intervalle I et k un nombre réel.

La fonction ...	**notée ...**	**a pour fonction dérivée ...**
$x \mapsto u(x) + v(x)$	$u + v$	$(u + v)' = u' + v'$
$x \mapsto ku(x)$	ku	$(ku)' = ku'$

Exemple

Pour tout réel x, $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 7$.
$f(x) = u(x) + v(x) + w(x) + z(x)$ avec $u(x) = x^3$, $v(x) = -5x^2$, $w(x) = 3x$ et $z(x) = -7$.
Pour tout réel x, $u'(x) = 3x^2$, $v'(x) = -5 \times 2x = -10x$, $w'(x) = 3 \times 1 = 3$, $z'(x) = 0$, donc pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$.

▸ f est une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est **croissante** sur I, alors pour tout nombre réel x de I, $f'(x) > 0$.
Si f est **constante** sur I, alors pour tout nombre réel x de I, $f'(x) = 0$.
Si f est **décroissante** sur I, alors pour tout nombre réel x de I, $f'(x) < 0$.
Réciproquement,
Si pour tout nombre réel x de I, $f'(x) > 0$, alors f est croissante sur I.
Si pour tout nombre réel x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.
Si pour tout nombre réel x de I, $f'(x) < 0$, alors f est décroissante sur I.

Exemple

Étude d'un polynôme de degré 2

Pour tout réel x, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
Pour étudier le sens de variation de la fonction f, il suffit d'étudier le signe de sa dérivée.
Pour tout réel x, $f'(x) = 2x - 4$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x - 4$.
On présente les variations de f dans **un tableau de variation**.
$f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 3$
$f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-1	↗	

On utilise le signe de $ax + b$ pour étudier le signe de $2x - 4$.

f est décroissante sur $]-\infty\,;2]$ et f est croissante sur $[2\,;+\infty[$.

Exemple

Étude d'un polynôme de degré 3

Pour tout réel x, $f(x) = x^3 - 27x$.
Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x - 3)(x + 3)$.

Tableau de signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Tableau de variation de f

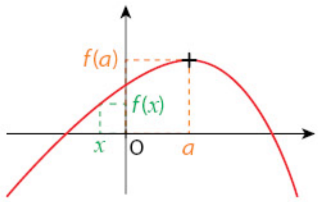
x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	54	↘	-54	↗	

f est croissante sur $]-\infty\,;-3]$ et sur $[3\,;+\infty[$; f est décroissante sur $[-3\,;3]$.

▸ f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un nombre de I.

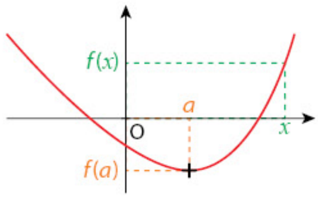
• Dire que **$f(a)$ est le maximum** de f sur I signifie que, pour tout nombre réel x de I :

$$f(x) \leqslant f(a)$$



• Dire que **$f(a)$ est le minimum** de f sur I signifie que, pour tout nombre réel x de I :

$$f(x) \geqslant f(a)$$



Exemple

Un problème d'optimisation

On reprend la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$ étudiée à la page 137.

Son tableau de variation permet d'affirmer que **–1** est **le minimum** de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et qu'**il est atteint en 2.**