MATHS 1re

Livre du professeur

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

MAGNARD

MATHS 1re

Enseignement de spécialité

Coordination

Hélène GRINGOZ et Frédéric WEYERMANN

Auteurs

Delphine BAU
Jérémy COUTEAU
François GUIADER
Marie HASCOËT
Didier KRIEGER
Laura MAGANA
Mathieu PRADEL
Frédéric WEYERMANN

Livre du professeur

MAGNARD

Édition : Marilyn Maisongrosse, Stéphanie Herbaut, Malvina Juhel, Aurore Balduzzi, Julie Drappier

Responsable éditorial : Adrien Fuchs

Maquette de couverture : Primo&Primo

Mise en pages et schémas : Nord-compo

SOMMAIRE

CHAPITRE 1 Notion de liste

Manuel p. 12-39

I. Introduction

Objectifs du chapitre

Dans ce manuel, nous avons souhaité pleinement prendre en charge la partie du programme sur les listes dans le langage Python par l'écriture d'un chapitre complet sur le sujet en plus des divers exercices en lien avec les différents chapitres disséminés dans le reste de l'ouvrage.

Ainsi, les élèves pourront découvrir la notion de liste ainsi que les différentes instructions en lien à travers d'activités d'introduction. Ils disposeront ensuite d'exercices variés (dans les thèmes et la difficulté) pour bien assimiler les différents points du programme.

Une deuxième partie de chapitre est consacrée aux listes définies en compréhension que nous avons mis en lien avec la notion d'ensemble, conformément au programme.

Capacités

➔ Comprendre ce que sont les listes en **Python** et savoir les utiliser notamment en manipulant leurs éléments et indices ou en itérant sur leurs éléments.

➔ Savoir expliciter ou définir une liste définie en compréhension et faire le lien avec les ensembles.

II. Corrigés des activités et exercices

Pour prendre un bon départ p. 13

1. Connaître quelques commandes usuelles

①	D
②	F
③	C
④	B
⑤	A
⑥	E

2. Comprendre la notion d'affectation

1. Pour l'affectation d'une valeur à **b**, c'est l'utilisateur qui choisit la valeur, elle n'est pas imposée par le programme comme pour la variable **a** qui reçoit la valeur **5**.

2. $a=3\times5=15$ et $b=15^2=225$.

3. Comprendre et utiliser les instructions conditionnelles

1. a) Pour $x=5$, on a : $2x-17=-7<5$

Donc le programme affiche **x est grand**.

b) Pour $x=17$, on a : $2x-17=17\geqslant5$

Donc le programme affiche **x est petit**.

2. $2x-17\geqslant5 \Leftrightarrow x\geqslant11$ donc le programme affiche **x est petit** pour **x** entier entre **11** et **20**.

4. Comprendre et utiliser les boucles bornées

En Python

```
for i in range(2,101):
    print(i**3)
```

En Langage naturel

```
Pour i allant de 2 à 100
    afficher i³
Fin pour
```

5. Comprendre et utiliser les boucles non bornées

1. **x** prend les valeurs

20;23;26;29;32;35

2.
```python
i=5
while i <= 10:
    x=3*i+5
    i=i+1
```

6. Comprendre et utiliser les fonctions

```python
def tarif_total(nb_enfants,nb_adultes):
    return 45*nb_enfants+70*nb_adultes
```

Activités p. 14-17

Activité 1.Travailler avec les coordonnées

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Introduire la notion de liste, de manipulation simple des indices et d'ajout d'un élément dans le langage **Python**.

A. Calcul de longueur

1.
```python
import math

def longueur(xA,yA,xB,yB):
    return math.sqrt((xB-xA)**2+(yB-yA)**2)
```

2. `l=`$\sqrt{10}$ soit environ **3,16**.

3. Car une fonction ne renvoie qu'une valeur or il y a deux coordonnées.

B. Un détour par les listes

2. Du type `list` ou `liste` en français.

3. a) On peut penser que l'affichage sera **6** (le 1er élément) mais c'est **8**.

b) On peut penser que l'affichage sera **4** (le 3e élément) mais il y a un message d'erreur.

c) `print(L[0])`

4. b) `L=[6,5,5]`

5. a) On obtient `[6,5,5,12]`

b) `L.append(x)` ajoute l'élément `x` à la fin de la liste `L`.

C. Coordonnées du milieu

1.
```python
import math

def saisie():
    x=float(input("x? "))
    y=float(input("y? "))
    A=[x,y]
    return A
```

2.
```python
def milieu(A,B):
    M=[(A[0]+B[0])/2,(A[1]+B[1])/2]
    return M
```

3.
```python
def longueur2(A,B):
    l=math.sqrt((B[0]-A[0])**2+(B[1]-A[1])**2)
    return l
```

4.
```python
A=saisie()
B=saisie()
print(milieu(A,B))
print(longueur2(A,B))
```

Activité 2. Étudier des statistiques avec des listes

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Découvrir et utiliser quelques instructions Python sur les listes : `len, sort, count` et le test d'appartenance d'un élément à une liste.

A. Une fonction statistique connue

1. a) `l=4` donc `l%2=0` (car `4=2`$\times$`2`) :
`k=2` et `m=(L[1]+L[2])/2=(12+36)/2=24.`

`l=9` donc `l%2=1` (car `9=2`$\times$`4+1`) :
`k=5` et `m=L[4]=7`.

b) Cette fonction donne la médiane d'une série ordonnée dont les termes sont les éléments de `L`.

c) Pour `k` pair, la médiane est la moyenne des termes de rangs `k` et `k+1` c'est-à-dire des éléments d'indice `k-1` et `k` puisque le premier élément a pour indice `0`.

2. a) `23`

c) Non, ce n'est pas la médiane (car la série n'est pas ordonnée).

3. a) Il suffit d'écrire `L.sort()` sur une ligne avant le premier `if`.

B. Tableau d'effectifs

1.a) Le programme 4 génère une liste de dix entiers aléatoires entre 1 et 20.

2.a) Prenons

`R=[20,19,18,15,5,19,2,14,5,18].`

Pour `i=1`$\notin$`R` : il ne se passe rien.

Pour `i=2`$\in$`R` : on a `V=[2]` et `E=[1]` car **2** apparaît une fois dans `R`.

etc.

À la fin : **`V=[2,5,14,15,18,19,20]`**
et **`E=[1,2,1,1,2,2,1].`**

c) La ligne des valeurs est constituées des éléments de **`V`** et la ligne des effectifs des éléments de **`E`**.

Activité 3. Itérer sur des éléments d'une liste

- **Durée estimée :** 35 min
- **Objectif :** Introduire le principe de l'itération sur les éléments d'une liste.

A. Principe général

1. a) Le programme affiche successivement
`0, 10, 20, 30` et **`40`**.

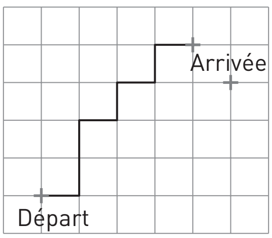
b) Pour tous les éléments de **`A`** (dans l'ordre), le programme affiche leur valeur à laquelle est soustrait **`1`**.

2.a) Pour tous les éléments de **`L1`**, le programme ajoute leur carré à la liste **`L2`** initialement vide et affiche **`[0,1,4,9,16].`**

B. Un petit jeu

1. 8 saisies minimum (5 vers la droite et 3 vers le haut).

2. Non :



3. a) Il faut faire au minimum |**a**|
déplacements horizontaux et |**b**|
déplacements verticaux donc la liste est de taille |**a**| + |**b**|.

b)
```
x=0
y=0
for i in D:
    if i == 'q' :
        x=x-1
    if i == 'd' :
        x=x+1
    if i == 'z' :
        y=y+1
    if i == 's' :
        y=y-1
if x == a and  y == b:
    print("Bravo !")
else:
    print("Pas loin, réessaie :-)")
```

Remarque : Les fichiers
9782210112568-zip-maths-1re-18.py
et 9782210112568-zip-maths-1re-19.py
disponibles sur le site compagnon sont des programmes complets permettant de voir fonctionner le programme. Le 2e de ces deux programmes est incomplet comme sur l'activité du livre : on pourra le donner directement aux élèves à compléter afin qu'ils puissent le tester.

Activité 4. Définir une liste en compréhension

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Introduire les listes définies en compréhension en lien avec la définition des ensembles en compréhension.

A. Ensembles définis en compréhension

1. $A = \{2 \times 0 + 1 ; 2 \times 1 + 1 ; 2 \times 2 + 1 ; 2 \times 3 + 1 ; ...\}$
$= \{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ...\}$
c'est l'ensemble des entiers (positifs) impairs.

2. a) Les points de suspension sous-entendent que les nombres suivants sont construits selon la même « logique ».

b) B est l'ensemble des multiples de 7.

c) $B = \{7i \mid i \in \mathbb{N}\}$

3. $C = \{1–1 ; 3–1 ; 5–1 ; 7–1 ; ...\}$
$= \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; ...\}$
c'est l'ensemble des entiers (positifs) pairs.

B. Listes définies en compréhension

1. a) On obtient **`[0,3,6,...,300].`**

b) C'est la liste des multiples de 3 entre 0 et 300.

c) $\{3i \mid i \in \mathbb{N} \text{ et } i \leqslant 100\}$

2. **`[(n*(n+1))/2 for n in range(1,21)]`**

3. b) • Dans la première liste, on considère les éléments de l'ensemble $\{i^i \mid i \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant 10\}$.

• Dans la deuxième liste, on considère les éléments de ce même ensemble mais uniquement s'ils sont inférieurs à 1 000 000 à cause de la condition **`if i**i<10**6.`**

C. 1. **`[2**i for i in range(64)]`**

2. **`sum([2**i for i in range(64)])`** **ou** **`sum(L)`** renvoient **`18446744073709551615.`**

3. Un grain de riz pèse environ 20 mg soit 0,02 grammes soit 2×10^{-5}kg soit 2×10^{-8} tonnes.

La masse totale de riz en tonnes est obtenue avec **`sum([2**i for i in range(64)])*2*10**(-8)`** qui renvoie approximativement **`368934881474`** soit près de 369 milliards de tonnes.

À vous de jouer p. 20-21

1.
```
L1=[21,32,37,8]
L2=[]
L2.append(L1[1])
print(L1)
print(L2)
```

2.
```
L3=[5.1,3.4,7.1,19.87]
a=L3[2]+L3[3]
L3.append(16)
print(L3)
```

3.
```
L=[0,1,1,0,0]
M=[0,1,0]
N=L+M
N.sort()
```

4.
```
import random
L=[1,4,27,256]
i=random.randint(0,3)
print(L[i])
del(L[i])
```

5. On multiplie successivement **`p`** par tous les éléments de **`L1`**, on a donc successivement :

`p=1` (initialisation) ;

`p=1×1=1` ;

`p=1×2=2` ;

`p=2×3=6` ;

`p=6×4=24` ;

`p=24×5=120`.

6. Le programme affiche : **`chous`** ; **`hibous`** et **`sous`**

7.
```
L=[5,7,9,8,7]
for i in L:
    print(2*i)
```

8.
```
L=[-5,-1,-2,3,8,17,-4,0]
s=0
for i in L:
    s=s+i**2
```

9. **`[7*i for i in range(0,101)]`**

10. **`[11*i for i in range(0,1001) if 11*i<10789]`** en voyant par exemple grossièrement que **`11×1000=11000`**.

Exercices d'application p. 22-24

Apprendre à apprendre

11. 1. *append* : ajouter

count : compter

delete : supprimer/effacer

insert : insérer

length : longueur

sort : trier

2. **`L.append(x)`** : ajoute **`x`** en fin de liste **`L`**.

`L.count(x)` : compte le nombre d'occurrences de **`x`** dans la liste **`L`**.

`del(L[i])` : supprime l'élément d'indice **`i`** de la liste **`L`**.

`L.insert(i,x)` : insère **`x`** en tant qu'élément d'indice **`i`** de la liste **`L`**.

`len(L)` : renvoie la taille de la liste **`L`**.

`L.sort()` : trie la liste **`L`** (dans l'ordre croissant).

12. De 0 à 12.

13. **`for i in L`** : itère sur les éléments de **`L`** c'est-à-dire que les valeurs prises par **`i`** sont les éléments de **`L`**. Par exemple si **`L=[2,12,36,4]`**, **`i`** vaut successivement **`2`**, **`12`**, **`36`** puis **`4`**.

`for i in range(len(L))` : itère sur les entiers de **`0`** à **`len(L)-1`**. Par exemple si **`L=[2,12,36,4]`** alors **`len(L)=4`**, **`i`** vaut successivement **`0`** ; **`1`** ; **`2`** puis **`3`**.

Questions-Flash

14. Le programme 3 (les autres renvoient des messages d'erreurs).

15. **`L2=[1,5,9,17]`**

`L2=[1,5,9,13,17]`

`L2=[1,5,9,13,17,25,21]`

`L2=[1,5,9,13,17,21,25]`

16. `L3=[1,2,3,4]` et `k=4`.

Pour `i=1` : `L3[1]=2*L3[3]` donc `L3=[1,8,3,4]`.

Pour `i=2` : `L3[2]=2*L3[2]` donc `L3=[1,8,6,4]`.

Pour `i=3` : `L3[3]=2*L3[1]` donc `L3=[1,8,6,16]`.

17. 1. Il affiche `12`.

2. Il affiche un message d'erreur car on cherche à comparer des chaînes de caractères et un entier.

18. 1.

```
def double(L):
    for i in L:
        print(2*i)
```

2.

```
def fois_k(L,k):
    for i in L:
        print(k*i)
```

19. $5 \times 12^2 - 3 = 717$,

$5 \times 13^2 - 3 = 842$,

$5 \times 18^2 - 3 = 1617$

et $5 \times 19^2 - 3 = 1802$.

20. `[8*i for i in range(14)]`

21. 1. `L5=[5*i for i in L4]`

2. `L6=[5*i for i in L4 if 5*i<1000]`

Générer une liste en extension, utiliser ses éléments et en ajouter

22.

```
A=[42,78,103]
A[1]=4
print(2*A[2])
A.append(78)
```

23.

```
B[0]=2*B[0]
B.append(B[4])
print(B)
```

24. Cet algorithme :

• définit la liste `L` dont les éléments sont `[0,1,4,9,16]`.

• ajoute `25` en fin de liste.

• remplace le premier élément (d'indice 0) par le double du dernier (d'indice 5).

À la fin de l'algorithme, `L=[50,1,4,9,16,25]`.

```
L=[0,1,4,9,16]
L.append(25)
L[0]=2*L[5]
```

Comprendre les manipulations sur les éléments d'une liste

25. a) `[9,8,7,6,5,4,3,1]`

puis `[9,8,7,6,5,4,3,2,1]`

puis `[1,2,3,4,5,6,7,8,9]`.

b) `4` puis `6` puis `[0,0,0,0,1,1]`.

26. a) `nombre`

b) `lettre`

c) `nombre`

27. a) `mathématiques`

b) `informatique`

c) `mathématiques`

28. a) `2` puis `1` puis `3` puis `1`.

b) `0` puis `0` puis `0` puis `0`.

Manipuler les éléments d'une liste

29.

```
del(L[2])
print(len(L))
L.sort()
```

30.

```
if 0 in L:
    print(L.count(0))
else:
    print(L[0])
```

31.

```
L=L1+L2
if len(L)>10:
    print("Grande liste")
else:
    L.insert(0,12)
```

32.

```
def tri_2_listes(L1,L2):
    L=L1+L2
    L.sort()
    return L
```

Parcourir une liste sans itérer sur ses éléments

33. 1. Il affiche **5** (**L[0]**$\times$ **2**^{0}),

14 (**L[1]**$\times$**2**^{1}),

32 (**L[2]**$\times$**2**^{2})

et **96** (**L[3]**$\times$**2**^{3}).

2. Le programme 2.

34. Si deux listes **A** et **B** sont de mêmes tailles, le programme génère la liste **C** des produits des éléments de **A** et **B**, sinon, il ne fait rien.

35.

```
if len(P) == len(N)  :
    for i in range(len(P)):
        L.append(N[i]+"-"+P[i])
else:
    print("Veuillez donner deux listes de la même taille")
```

Comprendre une itération sur les éléments d'une liste

36. • Le programme 1 ajoute successivement à **s** (initialisée à 0) les doubles des valeurs de la liste **A** donc à la fin, **s** vaut 2 + 4 + 6 + 8 = 20.

• Le programme 2 concatène successivement à **p** (initialisée à **une**) un espace et les valeurs de la liste **B** donc à la fin, il affiche **une jolie liste !**.

37. L'algorithme affiche successivement

-1 ; -0,68 ; -0,12 ; 0,68 ; 1,72 et **3**.

Le programme **Python** est :

```
tab=[1,1.2,1.4,1.6,1.8,2]
for x in tab:
    print(3*x**2-5*x+1)
```

38.1. Cela renvoie **[0,3,6]**.

2. Cela renvoie **[2,3]**.

3. indice(L,x) renvoie la liste des indices de **L** dont les éléments ont pour valeur **x**.

Itérer sur les éléments d'une liste

39.

```
for x in L:
    print(4*x**3-12*x**2+7*x+3)
```

40.

```
for x in L:
    print((3*x+3)/(x**2+4))
```

41. Il affiche **0,5** ; **0,333...** ; **0** ; **-1** ; **pas d'image** et **3**.

Le programme **Python** est :

```
L=[-2,-1,0,1,2,3]
for x in L:
    if x == 2:
        print("pas d'image")
    else:
        print(x/(x-2))
```

42.

```
for t in C:
    if t <= 0:
        print("solide")
    if t > 0 and t < 100:
        print("liquide")
    if t >= 100:
        print("gazeux")
```

Définir une liste en compréhension

43. a)

b) L2=[4*i for i in range(26)]

c) L3=[4*i for i in range(250,1000) if 4*i >= 1353 and 4*i <= 2711]

car on sait sans calcul que $4 \times 250 = 1\,000$

et $4 \times 999 = 4\,000 - 4 = 3\,996$ (mais on peut choisir d'autres valeurs que 250 et 1000).

44. a) L1=[2+5*i for i in range(100)]

b) L2=[i for i in L1 if i<200]

45. 1. M=[2n-1 for n in range(1,11)]**

2.a) F1=[2(2**n)+1 for n in range(0,6)]**

b) `F2=[2**(2**n)+1 for n in range(0,6) if 2**(2**n)+1 < 10**10]`

ou `F2=[i for i in F1 if i < 10**10]`

46. 1. `L1=[0.5*i for i in xrange(2,21)]`

2. `L2=[x**9 for x in L1 if x**9<1000000]`

Calculs et automatismes

47. `True` car 40 > 38.

48. `L[0]*(L.count(4))**1000=20`

car (20×1^{1000})

49. `len([1,2,3]+[5,6,7])-1=5`

50. `L=[-5,-3,3]`

Exercices d'entraînement p. 25-26

51.

```
if L[3]>1000:
    L[3]=0
else:
    del(L[3])
```

52.

```
k=L.count(0)
if k<2:
    for i in range(3-k):
        L.append(0)
```

53. 1.

```
def saisie_carac(n):
    L=[]
    for i in range(n):
        x=input("?")
        L.append(x)
    return L
```

2.

```
def saisie_flottants(n):
    L=[]
    for i in range(n):
        x=float(input("?"))
        L.append(x)
    return L
```

54.

```
#import random
def echantillon_entiers(a,b,n):
    L=[]
    for i in range(n):
        L.append(random.randint(a,b))
    return L
```

55.

```
def dernier(L):
    return L[len(L)-1]
```

56. Il y a deux programmes possibles suivant que l'on se préoccupe ou pas de la validité des indices.

```
def echange(L,i,j):
    x=L[i]
    L[i]=L[j]
    L[j]=x
    return L
```

ou

```
def echange(L,i,j):
    if i < len(L)-1 and j < len(L)-1:
        x=L[i]
        L[i]=L[j]
        L[j]=x
    else:
        print("indice incorrect : liste inchangée")
    return L
```

57.

```
def stabilite(L):
    i=1
    while abs(L[i]-L[i-1])<0.5:
        i=i+1
    return i
```

58. 1. `[8,12,5,7]`

2. Cette fonction crée une liste de `n` valeurs rentrées par l'utilisateur en insérant chaque nouvelle valeur en début de liste et la renvoie.

59.

```
def carres(L):
    C=[]
    for i in L:
        C.append(i**2)
    return C
```

60.

```
def taux_change(L):
    E=[]
    for i in L:
        E.append(i*0.88)
    return E
```

61. 1.

```
def max(L):
    M=L[0]
    for x in L:
        if x>M:
            M=x
    return M
```

2.
```
def min(L):
    m=L[0]
    for x in L:
        if x<m:
            m=x
    return m
```

62.
```
def barre(U,A):
    C=[]
    for x in U:
        if x not in A:
            C.append(x)
    return C
```

63. `[5*i**2 for i in range(4,101) if 5*i**2<=10000]` sans résoudre $5i^2 \leqslant 10\,000$ et en considérant que $5 \times 100^2 > 10\,000$ car $100^2 = 10\,000$.

64. 1. `A=[2*i for i in range(0,101)]` et `B=[4*i for i in range(0,51)]`

2. `C=[i for i in A if i not in B]`

3. $\{2+4i \mid i \in \mathbb{N} \text{ et } i \leqslant 49\}$

65. `random.randint(0,len(L)-1)` renvoie un entier aléatoire entre `0` et `len(L)-1` soit un indice au hasard de `L` donc cette instruction renvoie un élément de `L` au hasard.

66. 1.
```
import random


def tirage_lettre():
    L1=["a","d","i","l","n","o","r","s","t","u"]
    L2=["b","c","f","g","h","j","k","m","p","q","v","w","x","y","z"]
    n=random.randint(1,6)
    if n==1:
        lettre="e"
    else:
        if n==2:
            lettre=L2[random.randint(0,len(L2)-1)]
        else:
            lettre=L1[random.randint(0,len(L1)-1)]
    return lettre
```

2.
```
def tirage():
    L=[]
    for i in range(9):
        L.append(tirage_lettre())
    return L
```

3.
```
def indices(n):
    L=[]
    for i in range(n):
        x=int(input("entier entre 0 et 8 (tous distincts) : "))
        L.append(x)
    return L
```

4.
```
def reponse(T,I):
    mot=""
    for i in I:
        mot=mot+T[i]
    return mot
```

5.
```
T=tirage()
print(T)
n=int(input("Nombre de lettres pour le mot ? "))
I=indices(n)
mot=reponse(T,I)
print(mot)
```

67. 1.2.3.

```
import random

def atomes(n):
    L=[]
    for i in range(n):
        L.append(True)
    return L

def demie_vie(L):
    L2=[]
    for i in range(len(L)):
        if L[i]==False:
            L2.append(False)
        else:
            x=random.random()
            if x <= 0.5:
                L2.append(False)
            else:
                L2.append(True)
    return L2

def atomes_restants(L):
    return L.count(True)
```

4. a) On considère 1 000 atomes d'uranium 235, après une demi-vie (704 millions d'années), il en reste 494 et après deux demi-vies (1,408 milliards d'années), il en reste 248.

b)

```
def seuil(n,s,periode):
    L=atomes(n)
    nb_periodes=0
    while atomes_restants(L)/n >=s:
        L=demie_vie(L)
        nb_periodes=nb_periodes+1
    return periode*nb_periodes
```

Exercices bilan p. 27

69. 1. La liste **A** (**len(A)=3** et **A[2]=3**).

2.

```
def controle(L):
    if L[len(L)-1] != len(L):
        L.append(len(L)+1)
    return L
```

70. 1. **L[0]=2**, **L[1]=3**, **L[2]=5**, **L[3]=8**, **L[4]=12**, **L[5]=17**, **L[98]=4853** et **L[99]=4952**.

2. a) 3–2=1, 5–3=2, 3, 4 et 5.

b) **D[0]=1**, **D[1]=2**, **D[2]=3**, etc. donc on conjecture que **D[i]=i+1**.

c) **D[i]=L[i+1]-L[i]** et **D[i]=i+1** donc **L[i+1]=L[i]+i+1** pour **i** entre **0** et **98**.

71. 1. **X=[0.1*k for k in range(51)]**

2. **Y=[math.sqrt(x+3) for x in X]**

3.a) Entre 0 et 50.

b)

```
import math

def longueur(xA,yA,xB,yB):
    return math.sqrt((xB-xA)**2+(yB-yA)**2)


X=[0.1*k for k in range(51)]
Y=[math.sqrt(x+3) for x in X]

l=0
for i in range(50):
    l=l+longueur(X[i],Y[i],X[i+1],Y[i+1])
print(l)
```

72. 1. Pour **n=48795**, **A=[1,2,3,4,5]** donc la valeur de retour est **A[4]=5**.

Pour **n=100000**, **A=[1,2,3,4,5,6]** donc la valeur de retour est **A[5]=6**.

2. 10^i admet $i+1$ chiffres.

3. Cette fonction renvoie le nombre de chiffres de l'entier **n**.

73. 1. $17{,}99 \times 5 + 11 \times 3 + 55 \times 1 = 177{,}95$.

2.

```
def total(L1,L2):
    t=0
    for i in range(len(L1)):
        t=t+L1[i]*L2[i]
    return t
```

74. 1. On simule un entier **x1** entre **0** et **1** avec **random.random()**.

• Si **x1** $\leqslant$ **0,2**, on simule en réel **x2** au hasard entre 0,01 et 0,05 et on ajoute à la liste le dernier terme diminué de **x2** (sous forme décimale).

• Si **x1** $>$ **0,2**, on simule en réel **x2** au hasard entre 0,001 et 0,03 et on ajoute à la liste le dernier terme augmenté de **x2** (sous forme décimale).

2. a) Une liste de taille **n** est indicée de **0** à **n-1** donc le dernier indice est **n-1**.

b)

```
import random

def evolution(L):
    n=len(L)
    if random.random() <=0.2:
        L.append(L[n-1]*(1-random.uniform(0.01,0.05)))
    else:
        L.append(L[n-1]*(1+random.uniform(0.001,0.03)))
    return L
```

c)

```
L=[37.41]
for i in range(50):
    L=evolution(L)
print(L)
```

4.

```
def conversion(T1):
    T2=[]
    for i in T1:
        T2.append(hms(i))
    return T2
```

Exercices d'approfondissement p. 28

75. 1. On conjecture qu'elles renvoient la même liste si et seulement si tous les éléments de **L2** sont supérieurs ou égaux à ceux de **L1**.

2. Soit **n1=len(L1)** et **n2=len(L2)**.

• Dans **f1**, la liste de tous les éléments des deux listes est triée dans l'ordre croissant.

• Dans **f2**, on a **L1[0]** ⩽ **L1[1]** ⩽ **... L1[n1-2]** ⩽ **L1[n1-1]** et **L2[0]** ⩽ **L2[1]** ⩽ **... L2[n2-2]** ⩽ **L1[n2-1]** donc :

• Si **max(L1)** ⩽ **min(L2)** alors

L1[n1-1] ⩽ **L2[0]** donc **L1[0]** ⩽ **L1[1]**

⩽ **... L1[n1-2]** ⩽ **L1[n1-1]** ⩽ **L2[0]**

⩽ **L2[1]** ⩽ **... L2[n2-2]** ⩽ **L1[n2-1]**

et la liste concaténée est bien triée dans l'ordre croissant.

• Si **max(L1)>min(L2)** alors

L1[n1-1]>L2[0] donc la liste concaténée n'est pas classée dans l'ordre croissant.

76. 1.

```
def heures(temps):
    return (temps-(temps%3600))/3600
```

2.

```
def minutes(temps):
    return (temps-(temps%60))/60
```

3.

```
def hms(temps):
    h=heures(temps)
    m=minutes(temps-3600*h)
    s=temps-3600*h-60*m
    L=[h,m,s]
    return L
```

77. 1. Après application de cet algorithme, **L[k-1]** est le plus grand élément entre **L[0]** et **L[k-1]**.

2. • Après la première ligne, le dernier élément entre **L[0]** et **L[len(L)-1]** est le plus grand élément entre ces indices.

Comme les indices de **L** vont de **0** à **len(L)-1**, cela veut dire que le plus grand élément de **L** est en dernière position.

• Après la deuxième ligne, le dernier élément entre **L[0]** et **L[len(L)-2]** est le plus grand élément entre ces indices. Les deux derniers éléments de **L** sont donc les deux plus grands, classés dans l'ordre croissant.

3. **len(L)-1** fois (s'il y a deux éléments, une fois suffit, s'il y en a trois, 2 fois, etc.).

4.

```
def tri1(L,k):
    for i in range(k-1):
        if L[i]>L[i+1]:
            x=L[i]
            L[i]=L[i+1]
            L[i+1]=x
    return L

def tri2(L):
    for i in range(len(L)-1):
        L=tri1(L,len(L)-i)
    return L
```

78. 2. Pour **A** par exemple, on a :

• **x=1**, on parcourt alors la deuxième liste ce qui donne **y=4** donc **x*y=4**, **y=5** donc **x*y=5** et **y=6** donc **x*y=6**

• **x=2**, on parcourt alors la deuxième liste ce qui donne **y=4** donc **x*y=8, y=5** donc **x*y=10** et **y=6** donc **x*y=12**

• **x=3**, on parcourt alors la deuxième liste ce qui donne **y=4** donc **x*y=12**, **y=5** donc **x*y=15** et **y=6** donc **x*y=18**.

3.
```
def forfor(A,B):
    C=[]
    for x in A:
        for y in B:
            C.append(x*y)
    return C
```

Travaux pratiques p. 29-37

TP 1. Quelques fonctions usuelles

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Écrire quelques fonctions d'usage similaire à des instructions internes sur les listes.

A. Concaténation

1.
```
def concatener(M,N):
    L=M
    for i in N:
        L.append(i)
    return L
```

B. Nombre de x dans L

1.
```
def compter_element(L,x):
    compteur=0
    for i in L:
        if i == x:
            compteur=compteur+1
    return compteur
```

C. x dans L ?

1.
```
def appartient(L,x):
    if compter_element(L,x) == 0 :
        reponse=False
    else:
        reponse=True
    return reponse
```

TP 2. Programmation modulaire

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Comprendre que l'on peut utiliser un fichier de fonctions comme un module et comprendre la différence entre les instructions **import module** et **from module import ***.

Remarque importante : l'import d'un module dont le fichier est dans le même dossier que le script n'est pas toujours reconnu : dans ce cas, on exécutera le module dans la console mais il ne faudra alors pas utiliser le nom du module en préfixe pour utiliser ses fonctions.

1. b) Le programme génère deux listes de cinq réels aléatoires entre 0 et 1, les concatène et affiche la liste obtenue.

c)
```
import utilitaire
import random
A=[]
B=[]
for i in range(random.randint(3,7)):
    A.append(random.random())
    B.append(random.random())
print(utilitaire.concatener(A,B))
```

2. b) Le programme génère deux listes de cinq réels aléatoires entre 0 et 1, les concatène et affiche la liste obtenue.

c) Avec **from module import ***, on n'écrit pas le nom du module en préfixe de la fonction.

TP 3. Créer un module

- **Durée estimée :** 35 min
- **Objectif :** Créer un module « utile ».

Remarque : Penser à importer le module **math** avec lequel $\sqrt{x}$ s'écrit **math.sqrt(x)**.

1. a)
```
import math

def discriminant(a,b,c):
    return b**2-4*a*c
```

b)

```
def racines(a,b,c):
    d=discriminant(a,b,c)
    if d < 0 :
        print("Il n'y a pas de racine réelle.")
        nb_racines=0
    if d == 0:
        print(-b/(2*a),"est la seule racine.")
        nb_racines=1
    if d > 0:
        print((-b-math.sqrt(d))/(2*a),"et",(-b+math.sqrt(d))/(2*a),"sont les deux racines réelles.")
        nb_racines=2
    return nb_racines
```

c)

```
def signe(a,b,c):
    d=discriminant(a,b,c)
    if d < 0 :
        if a > 0:
            print("+")
        else:
            print("-")
    if d == 0:
        print(-b/(2*a),"est la seule racine.")
        if a > 0:
            print("+0+")
        else:
            print("-0-")
    if d > 0:
        print((-b-math.sqrt(d))/(2*a),"et",(-b+math.sqrt(d))/(2*a),"sont les deux racines réelles.")
        if a > 0:
            print("+0-0+")
        else:
            print("-0+0-")
```

2. a)

```
def poly(n):
    coeff=[]
    for i in range(n+1):
        print("rentrer ak pour k=",i)
        a=float(input(""))
        coeff.append(a)
    return coeff
```

b)

```
def derive_poly(n):
    coeff1=poly(n)
    coeff2=[]
    for i in range(n):
        coeff2.append(coeff1[i+1]*(i+1))
    return coeff2
```

TP 4. Insertion d'un élément

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Créer une fonction d'insertion d'un élément dans une liste.

1. a) On obtient la liste `[5,17,78,4,8]`.

b) Non (65 a été remplacé).

2. a) En reprenant avec `L`, `i` et `x` de la question 1, on obtient `[5,17,78,65,8]`.

b) Non.

3. `k-1`

4. a) La taille de la liste va augmenter de 1, il y a donc un élément supplémentaire qui va être le dernier élément de `L` avant insertion, c'est-à-dire `L[k-1]`.

b)

```
def inserer(L,i,x):
    k=len(L)
    L.append(L[k-1])
```

5.

```
j←k-2
Tant que j⩾i
    L[j+1]←L[j]
    j←j-1
Fin tant que
L[i]←x
Retourner L
```

6.

```
def inserer(L,i,x):
    k=len(L)
    L.append(L[k-1])
    j=k-2
    while j >= i :
        L[j+1]=L[j]
        j=j-1
    L[i]=x
    return L
```

TP 5. Des graphiques avec Python

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Découvrir les fonctionnalités graphiques de python (points seuls, lignes brisées, diagramme en barres).

A. Nuages de points et "courbes"

2. (1;12), (3;17) et (5;14)

3. `plt.plot(x,y,'r.')` trace les points dont les abscisses sont données par la liste `x` et les ordonnées sont données par la liste `y`.

4. Les points sont en reliés par des segments (-) bleus (b).

5. a) `x=[0,0.1,0.2,...,9.8,9.9,10]`

b) `y=[a**2 for a in x]`

c)

```
import matplotlib.pyplot as plt

x=[0.1*i for i in range(101)]
y=[a**2 for a in x]

plt.plot(x,y,'b-')
plt.show()
```

B. Un autre type de graphique

1. Elle trace le diagramme en bâtons correspondant à une série dont les valeurs sont dans la liste `x` et les effectifs dans la liste `y`.

2. b) Cette liste de taille 1000 est constituée des résultats de 1000 répétitions de l'expérience de la question 2a (somme de deux dés).

c) Cette liste est constituée des nombres entiers entre 2 et 12 inclus.

a) d) e)

```
import random

def hasard():
    return random.randint(1,6)+random.randint(1,6)

simu=[hasard() for i in range(1000)]
x=[i for i in range(2,13)]

y=[]
for i in x:
    y.append(simu.count(i))

plt.bar(x,y)
plt.show()
```

TP 6. Le crible d'Erastosthène

- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectifs :** Programmer le crible d'Ératosthène.

Un deuxième enjeu est de découvrir le principe d'optimisation d'un programme.

A. Programmation du crible

1. a) • 6 n'est pas premier (il est divisible par 2).

• 7 est premier car il n'est divisible par aucun premier lui étant inférieur (2, 3 ou 5).

b) Les quatre plus petits premiers sont donc 2, 3, 5 et 7.

c) • 8, 9 et 10 ne sont pas premiers.

• 11 est premier car les seuls premiers lui étant inférieurs sont 2, 3, 5 et 7 et aucun ne le divise.

2. a) • `divise = False` (initialisation).

• pour `i=2` : `divise = True` (car `10%2=0` puisque que $10 = 2 \times 5$).

• pour `i=3` : il n'y a pas de nouvelle affectation (car `10%3=1` puisque que $10 = 3 \times 3 + 1$).

• pour `i=5` : `divise = True` (car `10%5=0` puisque que $10 = 5 \times 2$).

• pour `i=7` : il n'y a pas de nouvelle affectation (car `10%7=3` puisque que $10 = 7 \times 1 + 3$).

b) `divise = False` (initialisation).

• pour `i=2` : il n'y a pas de nouvelle affectation (car `11%2=1` puisque que $11 = 2 \times 5 + 1$).

• pour `i=3` : il n'y a pas de nouvelle affectation (car `11%3=2` puisque que $11 = 3 \times 3 + 2$).

• pour `i=5` : il n'y a pas de nouvelle affectation (car `11%5=1` puisque que $11 = 5 \times 2 + 1$).

• pour `i=7` : il n'y a pas de nouvelle affectation (car `11%7=4` puisque que $11 = 7 \times 1 + 4$).

c) La fonction renvoie `True` si au moins un élément de `L` divise `n` et elle renvoie `False` sinon.

d) Une fois que la variable divise vaut `True`, elle ne peut plus valoir `False` (la seule affectation de la valeur `False` est à l'initialisation) donc la fonction pourrait renvoyer directement `True`, il est inutile de tester les valeurs suivantes de la liste.

3.

```
n ← Valeur saisie
premiers ← [2]
Pour i allant de 3 à n
    Si div(premiers,i)=False
     Ajouter i en fin de liste premiers
    Fin si
Fin pour
Afficher premiers
```

4.

```
def div(L,n):
    divise = False
    for i in L:
        if n%i ==0:
            divise = True
    return divise

n=int(input("n? "))
premiers=[2]
for i in range(3,n+1):
    if div(premiers,i) == False:
        premiers.append(i)
print(premiers)
```

B. Optimisation

1. et 2.

```
import time

def div(L,n):
    divise = False
    for i in L:
        if n%i ==0:
            divise = True
    return divise

def div2(L,n):
    divise = False
    for i in L:
        if n%i ==0:
            divise = True
            break
    return divise

n=int(input("n? "))

a=time.time()
premiers=[2]
for i in range(3,n+1):
    if div(premiers,i) == False:
        premiers.append(i)
b=time.time()
print("tps d'exéc. avec div :",b-a)
```

```
a=time.time()
premiers=[2]
for i in range(3,n+1):
    if div2(premiers,i) == False:
        premiers.append(i)
b=time.time()
print("tps d'exéc. avec div2 :",b-a)
```

2. Normalement, avec **`div2`**, c'est plus rapide.

3. Dans la fonction **`div`**, on peut sortir de la boucle pour dès que $i > \sqrt{n}$. Par exemple :

```
def div3(L,n):
    divise = False
    for i in L:
        if n%i ==0:
            divise = True
            break
        if i > math.sqrt(n):
            break
    return divise
```

TP 7. Suite de Fibonacci et loi de Benford

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Manipuler les listes afin d'observer la distribution des termes de la suite de Fibonacci.

A. Quelques fonctions

1.

```
def valeurs(L):
    V=[]
    for i in L:
        if i not in V:
            V.append(i)
    V.sort()
    return V
```

2.

```
def frequence(L,V):
    F=[]
    for i in range(len(V)):
        F.append(L.count(V[i])/len(L))
    return F
```

3. b) Cette fonction semble donner le chiffre le plus à gauche de l'écriture décimale de **x**.

4.

```
def fibo(k):
    FIB=[1,1]
    for i in range(2,k):
        FIB.append(FIB[i-2]+FIB[i-1])
    return FIB
```

B. Application

1. a) On lance **fibo(100)** depuis la console par exemple.

b) À première vue, non.

2.

```
S=[significatif(i) for i in fibo(1000)]
chiffres=[i for i in range(1,10)]
freq=frequence(S,chiffres)

for i in chiffres :
    print("La fréquence de ",i,"est",freq[i-1])
```

3. La fréquence semble décroitre quand le chiffre significatif augmente.

Remarque : On pourra préciser que le terme chiffre significatif donné ici ne correspond pas aux chiffres significatifs utilisés en sciences expérimentales.

TP 8. Analyse fréquentielle

- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** Manipuler les chaînes de caractères (qui sont des listes non modifiables) afin de faire de l'analyse fréquentielle.

A. les chaine de caractères : des listes presque comme les autres

1. De type chaîne de caractères.

2. a) On peut faire référence aux différents caractères avec des indices (en partant de 0), comme pour les listes et les différentes instructions vues pour les listes (**len**, **+**, **count**) fonctionnent également et de la même manière dans ce programme.

b) On s'attend à avoir **a=Boijour!**

c) On obtient un message d'erreur.

B. Analyse fréquentielle

1. a) **[1,0,0,0,3,0,1,1,0,1,0,0,2,2,2,2,0,2,0,1,0,0,0,0,1,0]**

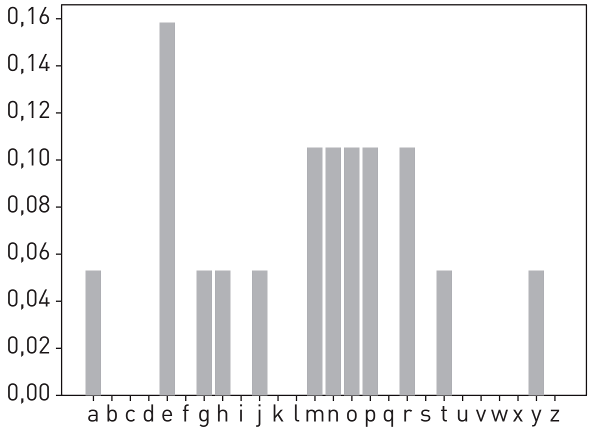
b) **C[0]** correspond au nombre d'occurrences de la lettre **a**, **C[1]** correspond au nombre d'occurrences de la lettre **b**.

b) Elle renvoie **19** ce qui correspond au nombre de lettres dans **je programme en Python**.

3.

```
def frequences(texte):
    C=compte_lettre(texte)
    k=sum(C)
    F=[i/k for i in C]
    return F
```

4. On obtient :



5. b) Les fréquences obtenues sont différentes selon les différentes langues.

TP 9. Développer comme des pros

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Comprendre et expliquer un programme contenant des instructions inconnues en autonomie.

A.Utilisation d'un programme

4. Les nombres possibles sont 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72 et 81.

B. Explication d'un programme

1. La liste **symb** contient des symboles (ligne 5) qui sont mélangés aléatoirement (ligne 6).

2.• lignes 8 à 10 : on crée la liste **R** des entiers de 0 à 99.

• on crée une liste **grille** dont les éléments sont de la forme **"i : symbole"** où i est un entier entre 1 et 99 et symbole est un élément de la liste **symb**. Attention, si **i** est divisible par 9, le symbole est toujours le même (le premier élément de **symb**), si **i** n'est pas divisible par 9 le symbole est aléatoire.

• ligne 20 à 29 : on affiche le texte des instructions avec des temps de pause de 5 secondes.

• ligne 32 : on demande à l'utilisateur s'il est prêt et on attend sa réponse, **o** ou **n**.

  – Si la réponse n'est pas **o**, le programme s'arrête (lignes 56-57)

  – Si la réponse est **o**, on affiche un texte puis la grille puis une pause (lignes 35 à 37) puis on demande à l'utilisateur si **"c'est bon"** et on attend sa réponse, **o** ou **n**.

* Si la réponse n'est pas **o**, le programme s'arrête (ligne 54)

* Si la réponse est **o**, on affiche un texte (avec des pauses) puis le premier symbole de la liste **symb**.

3. a) 0

b) Les multiples de 9.

c) Ce sont des multiples de 9.

d) On constate bien que tous les multiples de 9 ont le même symbole (l'étoile ici) donc tous les élèves doivent "penser" au même symbole qui sera donc affiché !

C. Pourquoi ça fonctionne?

1. $n = 10 \times x + y$

2. Le résultat de l'expérience est donc $10 \times x + y - (x + y) = 9x$ donc un multiple de 9 : comme tous les multiples de 9 ont le même symbole dans la grille, il suffit bien de l'afficher.

TP 10 Le bon formulaire

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Manipuler des listes de chaînes de caractères afin que tous les éléments répondent à des contraintes précises.

A. Jouer avec les mots

```
m1="Théorème"
m2=m1+" de Thalès"
m3=m2[0:12]
m3=m3+"Pythagore"
print(m2)
print(m3)
```

B. Standardisation de formulaire

1. Le programme affiche **Nom** (**liste[0]**) puis la variable **reponse** reçoit la valeur **Galois** puis l'ajoute en fin de liste **infos** qui vaut donc **["Galois"]**.

En procédant de même avec les autres éléments de liste, on obtient que **infos=["Galois", "Evariste","Blum","Créteil"]** en fin de boucle **for**.

Ensuite, **Galois** et **Créteil** sont passés en majuscules donc la fonction renvoie **["GALOIS", "Evariste","Blum","CRÉTEIL"]**

2.

```
def standardiser_mot(chaine):
    if len(chaine)<10:
        for i in range(10-len(chaine)):
            chaine=chaine+"*"
    else:
        chaine=chaine[0:10]
    return chaine
```

3.

```
def standardiser_liste(L):
    for i in range(len(L)):
        L[i]=standardiser_mot(L[i])
    return L
```

Exercices en autonomie p. 38-39

Créer et manipuler des listes

79. c **80.** a **81.** b **82.** c

83.

```
def zero(L):
    if 0 in L:
        exp="C'est nul"
    else:
        exp="C'est pas nul"
    return exp
```

84. **A=[36,49,64,81]**

85.

```
L=[10,100,100]
L[2]=10*L[2]
L.insert(0,0)
L=L+[10000,100000]
```

86.

```
def multiples(k,n):
    L=[]
    for i in range(n):
        L.append(k*i)
    return L
```

87.

```
for i in range(len(L)):
    if L[i]<0:
        L[i]=0
```

88. **1.** Il affiche successivement :

0 : 4

1 : 2

2 : 0

2.
```
def effectifs2(L,n):
    E=[]
    for i in range(n+1):
        E.append(L.count(i))
    return E
```

89.
```
def plus_grand(L):
    for i in range(0,len(L)-1):
        if L[i]>L[i+1]:
            print("plus grand")
        else:
            print("pas plus grand")
```

90. 1. `[4]`

2. `[5,6]`

3.
```
def mediane(L):
    L=supp(L)
    if len(L) == 2:
        m=(L[0]+L[1])/2
    else:
        m=L[0]
    return m
```

91.
```
T=[]
for i in range(101):
    if 11.2*i < 40+5.6*i:
        T.append(11.2*i)
    else:
        T.append(40+5.6*i)
```

Itérer sur les éléments d'une liste

92. b

93. 1. 1500, 2300, 2400, 3100, 3300

2. Cet algorithme convertit les valeurs d'une liste des kilomètres aux mètres et les affiche.

3.
```
dist=[1.5,2.3,2.4,3.1,3.3]
for d in dist:
    print(1000*d)
```

94. 1. `[1,2,3,4,7,9]`

2. Cette fonction donne la liste (triée dans l'ordre croissant) constituée de l'union des ensembles dont les éléments sont dans les listes **A** et **B**.

Remarque : On supprime les doublons entre **A** et **B** mais pas s'il y en a dans **A**.

3.
```
def inter(A,B):
    C=[]
    for i in A:
        if i in B:
            C.append(i)
    C.sort()
    return C
```

95.

1. 2.
```
def image_affine1(X,a,b):
    for i in X:
        print(a*i+b)

def image_affine2(X,a,b):
    Y=[]
    for i in X:
        Y.append(a*i+b)
    return Y
```

96.
```
def double(L,I):
    A=[]
    for i in L:
        if i not in I:
            A.append(i)
        else:
            A.append(2*i)
    return A
```

Définir une liste en compréhension

97. a. et **d.**

98. b. et **d.**

99. `[2**i for i in range(9)]`

100.

`[math.sqrt(i) for i in range(301) if i<100 or i>=200]`

101.

1. `A=[4*i for i in range(251)]`

2. `B=[10*i for i in range(101)]`

3. `C=[i for i in B if i in A]`

4. `D=[i for i in A if i not in B]`

CHAPITRE 2 Suites numériques

Manuel p. 42-79

I. Introduction

Objectifs du chapitre

Ce chapitre est le premier de la partie Algèbre. Son objectif est d'introduire et d'étudier la notion de suites, qui est une nouvelle notion vue en première.

Dans un premier temps, nous présentons les généralités sur les suites : comment définir une suite et comment la représenter graphiquement.

Dans un deuxième temps, nous étudions quelques suites particulières : les suites arithmétiques et géométriques. Nous allons également voir comment calculer la somme des termes d'une suite arithmétique ou géométrique.

Enfin, nous étudions les propriété des suites : étude de variations et notion de limite d'une suite.

Capacités

- → **Calculer les termes d'une suite.**
- → **Modéliser avec une suite.**
- → **Représenter graphiquement une suite.**
- → **Reconnaître une suite arithmétique et calculer le terme général.**
- → **Reconnaître une suite géométrique et calculer le terme général.**
- → **Calculer les sommes de termes pour des suites arithmétiques et géométriques.**
- → **Étudier les variations d'une suite.**
- → **Conjecturer la limite éventuelle d'une suite.**

II. Corrigés des activités et exercices

Pour prendre un bon départ p. 43

1. Déterminer des images et des antécédents

1. $f(5) = 14$

2. $f(-1) = -4$

3. $f(x) = 8 \Leftrightarrow 3x - 1 = 8$

$\Leftrightarrow x = 3$

Donc l'antécédent de 8 est 3.

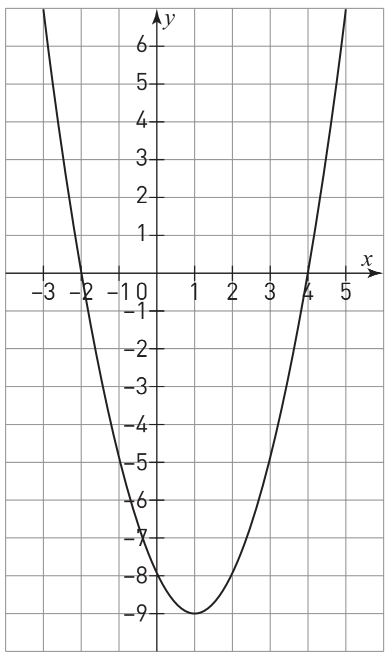
2. Donner une expression en fonction d'une inconnue

1. $f(n + 1) = n^2 + 2n$

2. $f(n - 1) = n^2 - 2n$

3. $f(2n) = 4n^2 - 1$

3. Tracer la courbe representative d'une fonction



4. Calculer avec les puissances

$A = 2^7$

$B = 2^4$

$C = 2^{-3}$

5. Utiliser des pourcentages

1. $19 \times \left(1 - \dfrac{20}{100}\right) = 15{,}2$

Le nouveau prix du T-shirt est 15,2 €.

2. $\dfrac{12 - 10}{10} \times 100 = 20$

Le prix de l'article a augmenté de 20 %.

6. Comprendre un algorithme en langage naturel

L'algorithme affiche 8.

7. Comprendre un programme en Python

Le programme affiche 5.

Activités p. 44-47

Activité 1. Découvrir la notion de suite avec le triangle de Sierpinski

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Introduire la notion de suite avec le triangle de Sierpinski.

1. a) À l'étape 0, il y a un triangle bleu.

b) À l'étape 1, il y a trois triangles bleus.

c) À l'étape 2, il y a neuf triangles bleus.

d) À l'étape 3, il y a 27 triangles bleus.

2. $u_0 = 1$ et $u_1 = 3$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n$.

4. Le 10e terme se note u_9 et on a $u_9 = 3^9 = 19\,683$.

Activité 2. Découvrir la notion de suite définie par récurrence

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Introduire la notion de suite définie par récurrence avec la spirale de Pythagore.

1. Le triangle OA_0A_1 est rectangle en A_0.
D'après le théorème de Pythagore :

$OA_1^2 = OA_0^2 + A_0A_1^2$

Donc $OA_1^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

Donc $OA_1 = \sqrt{2}$.

2. a) $u_0 = OA_0 = 1$

$u_1 = OA_1 = \sqrt{2}$

Le triangle OA_1A_2 est rectangle en A_1, donc d'après le théorème de Pythagore :

$OA_2^2 = OA_1^2 + A_1A_2^2$

Donc $OA_2^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 = 3$.

Donc $OA_2 = \sqrt{3}$.

Donc $u_2 = \sqrt{3}$.

b) Le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.
D'après le théorème de Pythagore :

$OA_{n+1}^2 = OA_n^2 + A_nA_{n+1}^2$

Donc $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 1$.

Donc $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$.

3. a) On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n+1}$.

b) $OA_{10} = u_{10} = \sqrt{11}$

Activité 3. Découvrir les suites arithmétiques

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Introduire la notion de suite arithmétique.

1. a) $20 + 2 = 22$

Donc le T-shirt coûtera 22 € en 2019.

b) $22 + 2 = 24$

Donc le T-shirt coûtera 24 € en 2020.

c) $20 + 2 \times 10 = 40$

Donc le T-shirt coûtera 40 € en 2028.

2. $u_0 = 20$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2$.

4. u_{20} correspond à 2018 + 20, soit 2038.
$U_{20} = 20 + 2 \times 20 = 60$

Activité 4. Découvrir les suites géométriques

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Introduire la notion de suite géométrique.

1. a) $\dfrac{2750 - 2500}{2500} \times 100 = 10$

Donc le nombre d'habitants a augmenté de 10 % entre 2017 et 2018.

b) $\dfrac{3025 - 2750}{2750} \times 100 = 10$

Donc le nombre d'habitants a augmenté de 10 % entre 2018 et 2019.

2. $3025 \times \left(1 + \dfrac{10}{100}\right) = 3327{,}5$

Donc en 2020, il y aura environ 3 327 habitants.

$3327 \times \left(1 + \dfrac{10}{100}\right) = 3659{,}7$

Donc en 2021, il y aura environ 3 660 habitants.

3. $v_0 = 2\,500$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_{n+1} = v_n \times \left(1 + \dfrac{10}{100}\right)$

$v_{n+1} = v_n \times 1{,}1$

5. $v_1 = 1{,}1 \times v_0$

$v_2 = 1{,}1 \times v_1 = 1{,}1 \times 1{,}1 \times v_0$

Donc $v_2 = 1{,}1^2 \times v_0$.

$v_3 = 1{,}1 \times v_2 = 1{,}1 \times 1{,}1^2 \times v_0$

Donc $v_3 = 1{,}1^3 \times v_0$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1{,}1^n \times v_0$

$v_n = 1{,}1^n \times 2\,500$

Activité 5. Calculer des sommes

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Calculer des sommes.

On veut calculer $S = 1 + 2 + \ldots + 99 + 100$.

En écrivant les termes dans l'ordre inverse, on obtient :

$S = 100 + 99 + \ldots + 2 + 1$

En additionnant terme à terme les deux expressions, on obtient :

$S + S = (1 + 100) + (2 + 99) + \ldots + (99 + 2) + (100 + 1)$

Donc $2S = 101 \times 100$.

Donc $S = \dfrac{101 \times 100}{2} = 5\,050$.

Activité 6. Étudier les variations d'une suite

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Étudier les variations d'une suite.

1. Une fonction f est croissante sur un intervalle I si et seulement si, pour tous réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1 \leqslant x_2$, on a $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

2. On conjecture le tableau suivant :

x	$-\infty$	$0{,}4$	$+\infty$
f	↘	$-0{,}16$	↗

3. La suite (u_n) semble croissante.

4. a) Dire que la suite (u_n) est strictement croissante, c'est dire que :

$u_0 < u_1 < u_2 < u_3$, etc. autrement dit que $u_n < u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) $u_0 = 0^2 - 0{,}8 \times 0 = 0$

$u_1 = 1^2 - 0{,}8 \times 1 = 0{,}2$

$u_2 = 2^2 - 0{,}8 \times 2 = 2{,}4$

$u_3 = 3^2 - 0{,}8 \times 3 = 6{,}6$

c) On peut penser que la suite (u_n) est croissante, mais on ne peut pas l'affirmer.

5. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - 0{,}8(n+1) - (n^2 - 0{,}8n) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 0{,}8n - 0{,}8 - n^2 + 0{,}8n \\ &= 2n + 0{,}2 \end{aligned}$$

b) $n \geqslant 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Activité 7. Étudier les variations des suites arithmétiques et géométriques

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Étudier les variations d'une suite arithmétique ou géométrique.

1. a) (u_n) est une suite arithmétique de raison 2, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = u_n + 2$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2$.

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2. a) $u_0 = 1$
$u_1 = u_0 \times 2 = 2$
$u_2 = u_1 \times 2 = 4$
$u_3 = u_2 \times 2 = 8$
La suite (u_n) semble strictement croissante.
b) $v_0 = 1$
$v_1 = v_0 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$
$v_2 = v_1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$
$v_3 = v_2 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$
La suite (v_n) semble strictement décroissante.
c) $w_0 = -1$
$w_1 = w_0 \times 2 = -2$
$w_2 = w_1 \times 2 = -4$
$w_3 = w_2 \times 2 = -8$
La suite (w_n) semble strictement décroissante.
d) $a_0 = -1$
$a_1 = a_0 \times \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$
$a_2 = a_1 \times \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$
$a_3 = a_2 \times \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{8}$
La suite (a_n) semble strictement croissante.

Activité 8. Découvrir la notion de limite d'une suite

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Introduire la notion de limite d'une suite.

1. a) Les termes u_n deviennent de plus en plus petits.
b) Les termes u_n se rapprochent de la valeur 5.
c) Les termes u_n se rapprochent de la valeur 3.
d) Les termes u_n prennent alternativement les valeurs 2 et – 1.
2. a) $u_1 = \dfrac{2 \times 1 + 1}{1 + 2} = 1$

$u_{10} = \dfrac{2 \times 10 + 1}{10 + 2} = \dfrac{21}{12}$

$u_{100} = \dfrac{2 \times 100 + 1}{100 + 2} = \dfrac{201}{102}$

$u_{1000} = \dfrac{2 \times 1000 + 1}{1000 + 2} = \dfrac{2\,001}{1002}$

b) Quand n prend des valeurs de plus en plus grandes, les termes u_n se rapprochent de la valeur 2.
c) $u_1 - l = 1 - 2 = -1$

$u_{10} - l = \dfrac{21}{12} - 2 = -\dfrac{3}{12} = -\dfrac{1}{4}$

$u_{100} - l = \dfrac{201}{102} - 2 = -\dfrac{3}{102} = -\dfrac{1}{34}$

$u_{1000} - l = \dfrac{2\,001}{1\,002} - 2 = -\dfrac{3}{1\,002} = -\dfrac{1}{334}$

d) Quand n prend des valeurs de plus en plus grandes, $u_n - l$ se rapproche de la valeur 0.
3. a) $u_1 = -1^2 = -1$
$u_{10} = -10^2 = -100$
$u_{100} = -100^2 = -10\,000$
$u_{1\,000} = -1\,000^2 = -1\,000\,000$
b) Quand n prend des valeurs de plus en plus grandes, u_n prend des valeurs de plus en plus petites.
4. a) $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = u_0 + u_1 = 1$;
$u_3 = u_1 + u_2 = 2$; $u_4 = u_2 + u_3 = 3$;
$u_5 = u_3 + u_4 = 5$; $u_6 = u_4 + u_5 = 8$;
$u_7 = u_5 + u_6 = 13$; $u_8 = u_6 + u_7 = 21$;
$u_9 = u_7 + u_8 = 34$
b) Quand n prend des valeurs de plus en plus grandes, u_n prend des valeurs de plus en plus grandes.

À vous de jouer ! p. 56-63

1. 1. $u_0 = 0^3 = 0$; $u_1 = 1^3 = 1$;
$u_2 = 2^3 = 8$; $u_3 = 3^3 = 27$
2. Voir la calculatrice.

2. 1. $u_0 = -0 + 5 = 5$
$u_1 = -1 + 5 = 4$
2. Voir la calculatrice.

3. 1. $u_0 = 2$; $u_1 = u_0^2 = 2^2 = 4$;
$u_2 = u_1^2 = 4^2 = 16$; $u_3 = u_2^2 = 16^2 = 256$
2. $u_9 \approx 1{,}34 \times 10^{154}$

4. 1. $w_1 = -w_0 + 0 = -(-1) + 0 = 1$

$w_2 = -w_1 + 1 = -1 + 1 = 0$

2. $w_{10} = 4$

5. 1. $200 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 30 = 210$

Il y aura 210 salariés en 2020.

$210 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 30 = 219$

Il y aura 219 salariés en 2021.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{10}{100}\right) + 30$

$u_{n+1} = 0{,}9u_n + 30$

6. 1. $60 \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 51$

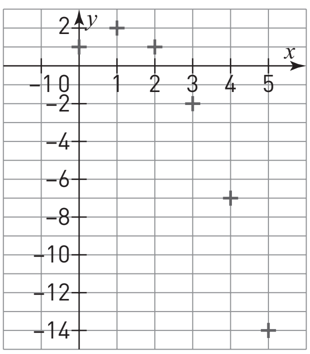
Le prix du pull après les premières soldes sera de 51 €.

2. a) $u_0 = 60$ et $u_1 = 51$.

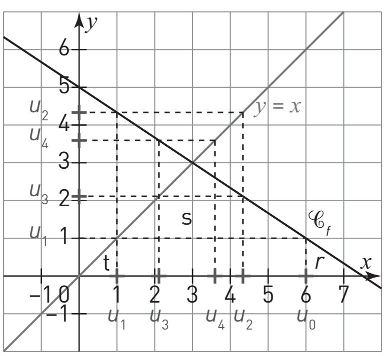
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{15}{100}\right) = 0{,}85u_n$

7.



8.



9. 1. $u_n = u_0 + n \times r = -2 + 3n$

2. $u_{20} = -2 + 3 \times 20 = 58$

10. 1. $v_0 = \sqrt{0} = 0$

$v_1 = \sqrt{1} = 1$

$v_2 = \sqrt{2}$

$v_1 - v_0 = 1$ et $v_2 - v_1 = \sqrt{2} - 1$.

Donc $v_1 - v_0 \neq v_2 - v_1$.

Donc la suite (v_n) n'est pas une suite arithmétique.

2. $w_0 = -0 + 4 = 4$

$w_1 = -1 + 4 = 3$

$w_2 = -2 + 4 = 2$

$w_1 - w_0 = -1$ et $w_2 - w_1 = -1$.

Donc la suite semble arithmétique. Démontrons-le.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$w_{n+1} - w_n = -(n + 1) + 4 - (-n + 4)$

$w_{n+1} - w_n = -n - 1 + 4 + n - 4$

$w_{n+1} - w_n = -1$

Donc la suite (w_n) est une suite arithmétique de raison -1.

11. 1. $u_n = u_0 \times q^n = -2 \times 2^n$

2. $u_{10} = -2 \times 2^{10} = -2\,048$

12. 1. $v_0 = \sqrt{0} = 0$

$v_1 = \sqrt{1} = 1$

$v_2 = \sqrt{2}$

$v_3 = \sqrt{3}$

$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{2}$ et $\frac{v_3}{v_2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Donc $\frac{v_2}{v_1} \neq \frac{v_3}{v_2}$.

Donc la suite (v_n) n'est pas une suite géométrique.

2. $w_0 = \frac{1}{3^0} = 1$

$w_1 = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$

$w_2 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$$\frac{w_1}{w_0} = \frac{1}{3} \text{ et } \frac{w_2}{w_1} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{9} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{3}$$

Donc la suite semble géométrique. Démontrons-le.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{1}{3^{n+1}} \\ &= \frac{1}{3 \times 3^n} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{1}{3} w_n \end{aligned}$$

Donc la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

13. a) $1 + 2 + \ldots + 150 = \frac{150 \times 151}{2} = 11\,325$

b) $$\begin{aligned} 50 + 51 + \ldots + 150 &= 1 + 2 + \ldots + 150 - (1 + 2 + \ldots + 49) \\ &= 11\,325 - \frac{49 \times 50}{2} \\ &= 10\,100 \end{aligned}$$

14. a) $$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{16}} &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{17}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 \times \left(1 - \frac{1}{2^{17}}\right) \\ &\approx 1{,}999985 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{10}} &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 \times \left(1 - \frac{1}{2^{11}}\right) \\ &\approx 1{,}999023 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{2^{12}} + \ldots + \frac{1}{2^{16}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{16}}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{10}}\right) \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{2^{17}}\right) - 2\left(1 - \frac{1}{2^{11}}\right) \\ &\approx 0{,}000961 \end{aligned}$$

15. 1. $$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{20} \\ &= u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r + \ldots + u_0 + 20r \\ &= 21 \times u_0 + r \times (1 + 2 + \ldots + 20) \\ &= 21 \times u_0 + r \times \frac{20 \times 21}{2} \\ &= 21 \times (-2) + 4 \times \frac{20 \times 21}{2} \\ &= 798 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} S_2 &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_9 \\ &= u_0 + u_0 \times q + \ldots + u_0 \times q^9 \\ &= u_0 \times (1 + q + \ldots + q^9) \\ &= u_0 \times \frac{1 - q^{10}}{1 - q} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1 - 3^{10}}{1 - 3} \\ &= 14\,762 \end{aligned}$$

16. 1. $$\begin{aligned} S_1 &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{50} \\ &= u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r + \ldots + u_0 + 50r \\ &= 51 \times u_0 + r \times (1 + 2 + \ldots + 50) \\ &= 51 \times u_0 + r \times \frac{50 \times 51}{2} \\ &= 51 \times 4 - 3 \times \frac{50 \times 51}{2} \\ &= -3\,621 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} S_2 &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{19} \\ &= u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r + \ldots + u_0 + 19r \\ &= 20 \times u_0 + r \times (1 + 2 + \ldots + 19) \\ &= 20 \times u_0 + r \times \frac{19 \times 20}{2} \\ &= 20 \times 4 - 3 \times \frac{19 \times 20}{2} \\ &= -490 \end{aligned}$$

3. $S_3 = u_{20} + u_{21} + u_{22} + \ldots + u_{50}$
$= (u_0 + u_1 + \ldots + u_{50}) - (u_0 + u_1 + \ldots + u_{19})$
$= S_1 - S_2$
$= -3\,131$

17. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = (n + 1 + 1)^2 - (n + 1)^2$
$= (n + 2)^2 - (n + 1)^2$
$= n^2 + 4n + 4 - (n^2 + 2n + 1)$
$= 2n + 3$

2. $u_{n+1} - u_n > 0$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

18. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$ et on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\dfrac{3^{n+1+2}}{7^{n+1}}}{\dfrac{3^{n+2}}{7^n}} = \frac{3^{n+3}}{7^{n+1}} \times \frac{7^n}{3^{n+2}} = \frac{3}{7}$$

2. $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 1$

Donc la suite (v_n) est strictement décroissante.

19. Quand n prend des valeurs de plus en plus grandes, les termes u_n se rapprochent de la valeur -5.

Donc on conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -5$.

20. Quand n prend des valeurs de plus en plus grandes, les termes v_n sont de plus en plus grands. Donc on conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Exercices d'application p. 64-67

Apprendre à apprendre

21. ① **C** ② **A** ③ **B**

22. Exemple de suite définie par une formule explicite : la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 2$.

Exemple de suite définie par une relation de récurrence : la suite (v_n) définie par $v_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+1} = 2v_n - 1$.

23.

Suite arithmétique	Suite géométrique
$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n \times q$
$u_n = u_0 + nr$ $u_n = u_1 + (n-1)r$ $u_n = u_p + (n-p)r$	$u_n = u_0 \times q^n$ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ $u_n = u_p \times q^{n-p}$
$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n \times (n+1)}{2}$	$1 + q + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Questions – Flash

24. $u_5 = 5^2 = 25$

25. $u_1 = u_0^2 = (-2)^2 = 4$
$u_2 = u_1^2 = 4^2 = 16$

26. $u_2 = u_1 + r = 3 - 2 = 1$

27. $u_{10} = u_4 + (10 - 4) \times r$
$= 5 + 6 \times 3 = 23$

28. $v_n = v_0 \times q^n = -3 \times 2^n$

29. $w_2 = w_1 \times q = 2 \times 3 = 6$

30. $u_{10} = u_4 \times q^{10-4}$
$= 3 \times 2^6 = 192$

31. $1 + 2 + \ldots + 50 = \dfrac{50 \times 51}{2} = 1\,275$

32. $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{10} = \dfrac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 2\,047$

33. a) On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

b) On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -5$

Suites définies par une formule explicite

34. $u_0 = 3$; $u_1 = 5$; $u_2 = 7$

35. $u_0 = -\dfrac{1}{3}$; $u_{10} = \dfrac{11}{17}$

36. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 3$; $u_3 = 7$; $u_4 = 15$

37. $u_{n+1} = 2(n + 1) - 1 = 2n + 1$

$u_{n-1} = 2(n - 1) - 1 = 2n - 3$

$u_{2n} = 2(2n) - 1 = 4n - 1$

$u_n + 1 = 2n - 1 + 1 = 2n$

38. $u_{n+1} = (n + 1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 2$

$u_{n-1} = (n - 1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$

$u_{2n} = (2n)^2 + 1 = 4n^2 + 1$

$u_n + 1 = n^2 + 1 + 1 = n^2 + 2$

39. 1. $u_n = 45 + 1{,}5n$

2. $u_{300} = 45 + 1{,}5 \times 300 = 495$.

S'il gare sa voiture dehors 300 jours par an, il payera 495 €.

Suites définies par une relation de récurrence

40. 1. $u_1 = 2u_0 + 1 = 2 \times (-5) + 1 = -9$

$u_2 = 2u_1 + 1 = 2 \times (-9) + 1 = -17$

2. À l'aide de la calculatrice, on trouve :
$u_{20} = -4\ 194\ 305$

41. 1. $u_1 = \dfrac{2u_0 - 2}{u_0 - 3} = \dfrac{2 \times 2 - 2}{2 - 3} = -2$

$u_2 = \dfrac{2u_1 - 2}{u_1 - 3} = \dfrac{2 \times (-2) - 2}{(-2) - 3} = \dfrac{6}{5}$

2. À l'aide de la calculatrice, on trouve : $u_{15} \approx 0{,}44$.

42. $u_2 = -3$

$u_3 = u_2^2 - 6 = (-3)^2 - 6 = 3$

$u_4 = u_3^2 - 6 = 3^2 - 6 = 3$

$u_5 = u_4^2 - 6 = 3^2 - 6 = 3$

43. 1. $100 \times \left(1 - \dfrac{5}{100}\right) + 10 = 105$

La ludothèque aura 105 jeux en 2020.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \dfrac{5}{100}\right) + 10$

$u_{n+1} = 0{,}95u_n + 10$

44. 1. $u_1 = 200$; $u_2 = 180$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} = \dfrac{1}{2} \times u_n + 80$

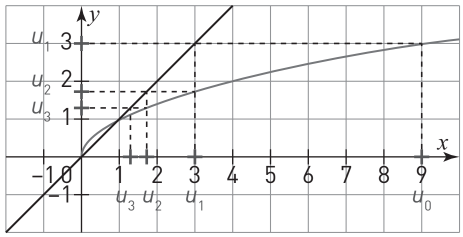
Représentation graphique

45. $u_0 = -2$; $u_1 = 0$; $u_2 = 3$; $u_3 = 2$; $u_4 = -1$

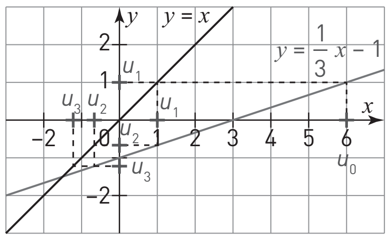
46. $v_0 = 1$; $v_1 = 2$; $v_2 = 4$; $v_3 = -1$; $v_4 = -3$

47. $v_0 = -2$; $v_1 = 3$; $v_2 = 1$; $v_3 = -2$; $v_4 = 3$

48. 1. et **2.**



49.



Suites arithmétiques

50. $u_1 = u_0 + r = 2 + 4 = 6$

$u_2 = u_1 + 4 = 10$

$u_3 = u_2 + 4 = 14$

51. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + r \times n$.

$u_n = -3 + 2n$

2. $u_{20} = -3 + 2 \times 20 = 37$

52. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_n = u_3 + r \times (n - 3)$

$u_n = -10 + 3n$

2. $u_{10} = -10 + 3 \times 10 = 20$

53. $u_0 = u_4 + r \times (0 - 4)$

Donc $u_0 = 9 - \dfrac{3}{2} \times 4 = 3$.

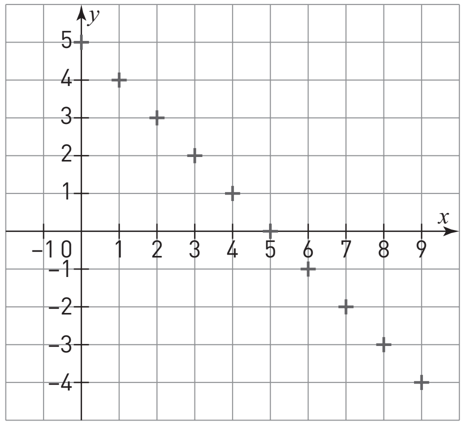
54. (u_n) est une suite arithmétique.
Soit r la raison de la suite.
On a $u_1 = u_0 + r$.
Donc $r = u_1 - u_0 = 7 - 3 = 4$.

55. (u_n) est une suite arithmétique.
Soit r la raison de la suite.
On a :
$u_6 = u_2 + r \times (6 - 2)$
Donc $-1 = 4 + r \times 4$.
Donc $-5 = r \times 4$.
Donc $r = -\dfrac{5}{4}$.

56. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$u_{n+1} = u_n + (-4)$
Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison -4.
b) $v_0 = -0 + 3 = 3$; $v_1 = -1 + 3 = 2$ et $v_2 = -2 + 3 = 1$.
Donc $v_1 - v_0 = -1$ et $v_2 - v_1 = -1$.
La suite (v_n) semble arithmétique.
Démontrons-le.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= -(n+1) + 3 - (-n + 3) \\ &= -n - 1 + 3 + n - 3 = -1 \end{aligned}$$
Donc la suite (v_n) est arithmétique de raison -1.
c) $w_0 = 0^2 - 3 = -3$; $w_1 = 1^2 - 3 = -2$ et $w_2 = 2^2 - 3 = 1$.
Donc $w_1 - w_0 = 1$ et $w_2 - w_1 = 3$.
$w_1 - w_0 \neq w_2 - w_1$
Donc la suite (w_n) n'est pas arithmétique.

57. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} u_n &= (n+1)^2 - n^2 \\ &= n^2 + 2n + 1 - n^2 \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+2)^2 - (n+1)^2 \\ &= n^2 + 4n + 4 - (n^2 + 2n + 1) \\ &= 2n + 3 \end{aligned}$$
Donc $u_{n+1} - u_n = (2n + 3) - (2n + 1)$.
$u_{n+1} - u_n = 2$
Donc la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 2.

58. 1.



2. Ces points sont alignés sur la droite d'équation $y = 5 - x$.

59. 1. Leila avait 10 jeux vidéo en janvier 2019. Donc $u_0 = 10$.
2. Elle achète deux nouveaux jeux le premier jour de chaque mois.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2$.
Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 2.

60. 1. Le premier jour, Enzo fait deux longueurs. Donc $u_1 = 2 \times 50 = 100$.
2. Chaque jour, il nage une longueur de plus que le jour précédent.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 50$.
Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 50.

Suites géométriques

61. $u_1 = u_0 \times q = 0{,}5 \times (-2) = -1$
$u_2 = u_1 \times q = (-1) \times (-2) = 2$
$u_3 = u_2 \times q = 2 \times (-2) = -4$

62. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.
$u_n = (-1) \times 3^n = -3^n$
2. $u_{10} = -3^{10} = -59\,049$

63. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_5 \times q^{n-5}$.
$$u_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}$$
2. $u_{10} = 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10-5} = 0{,}0625$

64. $u_0 = u_3 \times q^{0-3}$

Donc $u_0 = 12 \times 2^{-3} = 1{,}5$.

65. (u_n) est une suite géométrique.

Soit q la raison de la suite. On a $u_1 = u_0 \times q$.

Donc $q = \dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{4}{-3} = -\dfrac{4}{3}$.

66. (u_n) est une suite géométrique.

Soit q la raison de la suite. On a $u_4 = u_2 \times q^{4-2}$.

Donc $1 = 4 \times q^2$.

Donc $q^2 = \dfrac{1}{4}$.

Or $q > 0$. Donc $q = \dfrac{1}{2}$.

67. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} \times u_n$.

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

b) $v_0 = -3^0 = -1$; $v_1 = -3^1 = -3$ et $v_2 = -3^2 = -9$.

Donc $\dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{-3}{-1} = 3$ et $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{-9}{-3} = 3$.

La suite (v_n) semble géométrique. Démontrons-le.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -3^{n+1}$

$= -3 \times 3^n$

$= 3 \times (-3^n)$

$= 3v_n$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 3.

c) $w_0 = \dfrac{1}{4^0} = 1$; $w_1 = \dfrac{1}{4^1} = \dfrac{1}{4}$ et $w_2 = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$.

Donc $\dfrac{w_1}{w_0} = \dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{w_2}{w_1} = \dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{4}$.

La suite (w_n) semble géométrique. Démontrons-le.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \dfrac{1}{4^{n+1}}$

$= \dfrac{1}{4 \times 4^n}$

$= \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4^n}$

$= \dfrac{1}{4} w_n$

Donc la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

d) $a_0 = \dfrac{1}{0+1} = 1$; $a_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

et $a_2 = \dfrac{1}{1+2} = \dfrac{1}{3}$.

Donc $\dfrac{a_1}{a_0} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$.

Donc $\dfrac{a_1}{a_0} \neq \dfrac{a_2}{a_1}$.

La suite (a_n) n'est pas géométrique.

68. 1. u_0 est le nombre d'habitants en 2018.

Donc $u_0 = 10\,000$.

u_1 est le nombre d'habitants en 2019.

Donc $u_1 = 10\,000 \times \left(1 + \dfrac{10}{100}\right) = 11\,000$.

2. Pour tout $\in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \dfrac{10}{100}\right) = 1{,}1u_n$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 1,1.

69. 1. u_0 correspond à la part du gâteau avant qu'il se serve. Donc $u_0 = 1$.

u_1 correspond à la part du gâteau après s'être servi une fois. Donc $u_1 = \dfrac{1}{2}$.

2. Pour tout $\in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} \times u_n$.

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

Calcul de sommes

70. a) $S = 1 + 2 + ... + 15$

$S = \dfrac{15 \times 16}{2} = 120$

b) $S = 1 + 2 + ... + 7$

$S = \dfrac{7 \times 8}{2} = 28$

c) $S = 8 + 9 + ... + 15$

$S = 1 + 2 + ... + 15 - (1 + 2 + ... + 7)$

$S = 120 - 28$

$S = 92$

d) $S = 7 + 8 + \ldots + 50$

$S = 1 + 2 + \ldots + 50 - (1 + 2 + \ldots + 6)$

$S = \dfrac{50 \times 51}{2} - \dfrac{6 \times 7}{2}$

$S = 1\,254$

71. $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{19}$

$S = u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r + \ldots + u_0 + 19r$

$S = 20u_0 + r \times (1 + 2 + \ldots + 19)$

$S = 20u_0 + r \times \dfrac{19 \times 20}{2}$

$S = 20 \times (-1) + 2 \times \dfrac{19 \times 20}{2}$

$S = 360$

72. $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{29}$

$S = u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r + \ldots + u_0 + 29r$

$S = 30u_0 + r \times (1 + 2 + \ldots + 29)$

$S = 30u_0 + r \times \dfrac{29 \times 30}{2}$

$S = 30 \times 4 + (-3) \times \dfrac{29 \times 30}{2}$

$S = -1\,185$

73. $S = 0 + 2 + 4 + \ldots + 48$

$S = 2 \times (1 + 2 + \ldots + 24)$

$S = 2 \times \dfrac{24 \times 25}{2}$

$S = 600$

74. a) $S = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{12}$

$S = \dfrac{1 - 3^{13}}{1 - 3}$

$S = 797\,161$

b) $S = 1 - 2 + 4 - 8 + 1\,024 - 2\,048$

$S = 1 + (-2) + (-2)^2 + \ldots + (-2)^{11}$

$S = \dfrac{1 - (-2)^{12}}{1 - (-2)}$

$S = -1\,365$

75. $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_9$

$S = u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \ldots + u_0 \times q^9$

$S = u_0 \times (1 + q + q^2 + \ldots + q^9)$

$S = u_0 \times \dfrac{1 - q^{10}}{1 - q}$

$S = 10 \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^{10}}{1 - \dfrac{4}{5}}$

$S = 50 \times \left[1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^{10}\right]$

$S \approx 44{,}631$

76. $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{14}$

$S = u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \ldots + u_0 \times q^{14}$

$S = u_0 \times (1 + q + q^2 + \ldots + q^{14})$

$S = u_0 \times \dfrac{1 - q^{15}}{1 - q}$

$S = -9 \times \dfrac{1 - 2^{15}}{1 - 2}$

$S = -294\,903$

Sens de variation d'une suite

77. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = (n + 1)^2 + 2(n + 1) - (n^2 + 2n)$

$= n^2 + 2n + 1 + 2n + 2 - n^2 - 2n$

$= 2n + 3$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{4}{n + 2} - \dfrac{4}{n + 1}$

$= \dfrac{4(n + 1) - 4(n + 2)}{(n + 2)(n + 1)}$

$= \dfrac{4n + 4 - 4n - 8}{(n + 2)(n + 1)}$

$= \dfrac{-4}{(n + 2)(n + 1)}$

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = -5^{n+1} - (-5^n)$

$= 5^n \times (-5) + 5^n$

$= 5^n \times (-5 + 1)$

$= 5^n \times (-4)$

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

78. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{7 \times 0{,}5^{n+1}}{7 \times 0{,}5^n} = 0{,}5$$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4 \times 9^{n+1}}{4 \times 9^n} = 9$$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

79. 1. Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n}$$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n}{n+1}$.

2. $\frac{2n}{n+1} > 1 \Leftrightarrow 2n > n+1$ car $n + 1 > 0$

$\Leftrightarrow n > 1$

3. Pour tout entier $n > 0$, on a $u_n > 0$.

On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 2.

80. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n} \geqslant 0$

Donc la suite (u_n) est croissante.

b) $v_0 = 3$; $v_1 = \frac{3}{3} = 1$; $v_2 = \frac{3}{1} = 3$; $v_3 = \frac{3}{3} = 1$

Donc la suite (v_n) n'est pas monotone.

81. a) (u_n) est une suite arithmétique de raison $2 > 0$.
Donc (u_n) est strictement croissante.

b) (v_n) est une suite arithmétique de raison $-5 < 0$.
Donc (v_n) est strictement décroissante.

82. a) (u_n) est une suite géométrique de raison $2 > 1$ et de premier terme $3 > 0$.
Donc (u_n) est strictement croissante.

b) (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}5 < 1$ et de premier terme $-2 < 0$.
Donc (v_n) est strictement croissante.

Limite

83. a) On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -4$.

b) On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

c) On conjecture que la suite (u_n) n'a pas de limite.

84. a) On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

b) On conjecture que la suite (v_n) n'a pas de limite.

c) On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -2$.

85. a) On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

b) On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Calculs et automatismes

86. a) $u_1 = 2 \times 1 - 3 = -1$

$u_5 = 2 \times 5 - 3 = 7$

b) $u_1 = 2u_0 - 3 = 5$; $u_2 = 7$; $u_3 = 11$; $u_4 = 19$ et $u_5 = 35$.

87. a) $S = 1 + 2 + \ldots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5\,050$

b) $S = 50 + 2 + \ldots + 100$

$= 1 + 2 + \ldots + 100 - (1 + 2 + \ldots + 49)$

$= 5\,050 - \frac{49 \times 50}{2}$

$= 3\,825$

c) $S = 1 + 2 + 4 + \ldots + 1\,024$

$= 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{10}$

$= \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2}$

$= 2\,047$

Exercices d'entraînement p. 68-71

Généralités sur les suites

88. a) $u_0 = 2$; $u_1 = u_0 + 0^2 = 2$;

$u_2 = u_1 + 1^2 = 3$; $u_3 = u_2 + 2^2 = 7$

b) $u_0 = 2$; $u_1 = -1$; $u_2 = u_0 \times u_1 = -2$; $u_3 = u_1 \times u_2 = 2$

89. 1. $u_1 = u_0 + 0 = 2$; $u_2 = u_1 + 1 = 3$

2. $u_n = u_{n-1} + (n - 1)$

90. a) $u_n = 5 \Leftrightarrow -2n + 21 = 5$

$\Leftrightarrow -2n = -16$

$\Leftrightarrow n = 8$

Donc u_n prend la valeur 5 quand $n = 8$.

b) $u_n = 5 \Leftrightarrow \dfrac{n+26}{n+2} = 5$

$\Leftrightarrow n + 26 = 5(n + 2)$

$\Leftrightarrow n + 26 = 5n + 10$

$\Leftrightarrow -4n = -16$

$\Leftrightarrow n = 4$

Donc u_n prend la valeur 5 quand $n = 4$.

91. Il faut rentrer la formule :

```
=2*A2-3
```

92. Il faut rentrer la formule :

```
=-3*A2^2+2*A2-5
```

93. Il faut rentrer la formule :

```
=1/2*B2+1
```

94. Il faut rentrer la formule :

```
=2*B2-A2
```

95. 1. Cet algorithme permet d'afficher la valeur de u_{25}.

2. Il affiche -1.

3. Il faut changer la deuxième ligne en écrivant :

```
Pour i allant de 1 à 40
```

96. 1. $u_1 = 2u_0 + 1 = 2 \times 5 + 1 = 11$

$u_2 = 2u_1 + 1 = 2 \times 11 + 1 = 23$

2.

```
u←5
Pour i allant de 1 à 20
    u←2*u+1
Fin pour
Afficher u
```

3. $u_{20} = 6\ 291\ 455$

97. 1. Ce programme crée une liste des 20 premiers termes de la suite (u_n).

2. L[6] correspond à u_6.

$u_6 = 3 \times 6 - 1 = 17$

98.

```
L=[]
For i in range(0,30):
    L.append(i**2)
```

99. Il faut compléter la dernière ligne par L[10].

100. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 45 + 0{,}05n$.

2. $u_{15} = 45 + 0{,}05 \times 15 = 45{,}75$

Pour imprimer 15 photos, il doit payer 45,75 €.

3. $u_n = 98 \Leftrightarrow 45 + 0{,}05n = 98$

$\Leftrightarrow 0{,}05n = 53$

$\Leftrightarrow n = 1\ 060$

Il a donc imprimé 1 060 photos.

101. 1. $u_0 = 2^0 - 1 = 0$

$u_1 = 2^1 - 1 = 1$

$u_2 = 2^2 - 1 = 3$

$v_0 = 0$

$v_1 = 2v_0 + 1 = 1$

$v_2 = 2v_1 + 1 = 3$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

et $2u_n + 1 = 2 \times (2^n - 1) + 1$

$= 2^{n+1} - 2 + 1$

$= 2^{n+1} - 1$

Donc $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

3. Les suites (u_n) et (v_n) ont le même premier terme $u_0 = v_0 = 0$, et la même relation de récurrence. Donc elles sont égales.

102. Cet algorithme sert à calculer la somme des 21 premiers termes de la suite (u_n) (de u_0 à u_{20}).

103.

```
u←1
S←0
Pour i allant de 0 à 49
    S←S+u
    u←2*u+1
Fin pour
```

Suites arithmétiques et géométriques

104. 1. a) 10 + 30 = 40. Donc le deuxième barreau est à 40 cm du sol.

b) 40 + 30 = 70. Donc le troisième barreau est à 70 cm du sol.

2. a) $u_1 = 10$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + 30$.

c) (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 30$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$u_n = u_1 + r \times (n - 1)$.

$u_n = 10 + 30 \times (n - 1)$

$u_n = -20 + 30n$

105. 1. $u_1 = 40 + 2 = 42$

2. $u_{n+1} = u_n + 2$. Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + r \times n$.

$u_n = 40 + 2n$

4. $u_{15} = 40 + 2 \times 15 = 70$

Après le passage de 15 enfants, la tour mesure 70 cm.

5. $u_n = 100 \Leftrightarrow 40 + 2n = 100$

$\Leftrightarrow 2n = 60$

$\Leftrightarrow n = 30$

Il faut 30 passages pour que la tour mesure 1 m.

106. 1. Pour tout $\in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 50$.

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 50$.

Donc $u_n = u_0 + r \times n$.

$u_n = 100 + 50n$

2. $u_5 = 100 + 50 \times 5 = 350$

Donc le lendemain de son 15e anniversaire, Marie aura 350 € dans son coffre.

3. $u_n = 1\,000 \Leftrightarrow 100 + 50n = 1\,000$

$\Leftrightarrow 50n = 900$

$\Leftrightarrow n = 18$

Marie aura 1 000 euros dans son coffre le lendemain de son 28e anniversaire.

107. 1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = u_n + 0{,}5$.

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 0{,}5$.

Donc $u_n = u_1 + r \times (n - 1)$

$u_n = 1 + 0{,}5 \times (n - 1)$

$u_n = 0{,}5 + 0{,}5n$

2. $u_{10} = 0{,}5 + 0{,}5 \times 10 = 5{,}5$

La 10e poupée mesure 5,5 cm.

3. $S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{10}$

$S = u_1 + u_1 + r + u_1 + 2r + \ldots + u_1 + 9r$

$S = 10 \times u_1 + r \times (1 + 2 + \ldots + 9)$

$S = 10 \times u_1 + r \times \dfrac{9 \times 10}{2}$

$S = 10 \times 1 + 0{,}5 \times \dfrac{9 \times 10}{2}$

$S = 32{,}5$

La pile formée de 10 poupées aurait une hauteur de 32,5 cm.

108. 1. $20 + 5 = 25$

Le deuxième jour, il parcourt 25 km.

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = u_n + 5$.

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 5$.

Donc $u_n = u_1 + r \times (n - 1)$.

$u_n = 20 + 5\times (n - 1)$

$u_n = 15 + 5n$

3. a) $s_1 = 20$ et $s_2 = 20 + 25 = 45$.

b) $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

$s_n = u_1 + u_1 + r + \ldots + u_1 + (n - 1)r$

$s_n = n \times u_1 + r \times (1 + 2 + \ldots + n - 1)$

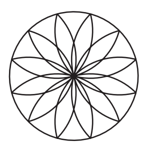
$s_n = n \times u_1 + r \times \dfrac{(n-1)n}{2}$

$s_n = 20n + 5 \times \dfrac{(n-1)n}{2}$

4. À l'aide de la calculatrice, on a $s_{25} = 2\,000$.

Donc Aurélien aura parcouru les 2 000 km et sera arrivé à Stockholm au bout de 25 jours.

109. 1.



2. $u_1 = 6$ et $u_2 = 12$.

3. $u_{n+1} = 2u_n$

4. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.

$u_n = 3 \times 2^n$

110. On note u_n le score de Nicolas après n semaines d'entraînement.

On a $u_0 = 3\,500$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \left(1 + \frac{5}{100}\right) \times u_n = 1{,}05u_n$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}05$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.

$u_n = 3\,500 \times 1{,}05^n$

À l'aide de la calculatrice, on a $u_7 \approx 4\,925$ et $u_8 \approx 5\,171$.

Donc Nicolas battra Carole après 8 semaines d'entraînement.

111. 1. a) $u_0 = 5\,000$ et $u_1 = 5\,000 + 110 = 5\,110$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 110$.

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 110$.

Donc $u_n = u_0 + r \times n$.

$u_n = 5\,000 + 110n$

c) $2\,040 = 2\,019 + 21$

$u_{21} = 5\,000 + 110 \times 21 = 7\,310$

Il aurait 7 310 € sur son compte en 2 040.

2. a) $v_0 = 5\,000$ et

$$v_1 = 5\,000 \times \left(1 + \frac{2}{100}\right) = 5\,100.$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = v_n \times \left(1 + \frac{2}{100}\right) = 1{,}02v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}02$. Donc $v_n = u_0 \times q^n$.

$v_n = 5\,000 \times 1{,}02^n$

c) $2\,040 = 2\,019 + 21$

$v_{21} = 5\,000 \times 1{,}02^{21} \approx 7\,578{,}33$

Il aurait 7 578,33 € sur son compte en 2040.

3. $u_5 = 5\,000 + 110 \times 5 = 5\,550$

$v_5 = 5\,000 \times 1{,}02^5 \approx 5\,520{,}40$

$u_5 > v_5$, donc s'il décide de laisser l'argent sur son compte pendant 5 ans, l'offre à taux fixe est plus intéressante.

4. À l'aide de la calculatrice, on a :

$u_{10} = 6\,100$ et $v_{10} \approx 6\,094{,}97$

$u_{11} = 6\,210$ et $v_{11} \approx 6\,216{,}87$

Donc l'offre à taux composés devient plus intéressante à partir de 11 ans.

112. 1. $1 + 2 + 3 + \ldots + 15 = \frac{15 \times 16}{2} = 120$

$120 \times 10 = 1\,200$

Donc, pour passer 15 extraits, il paiera 1 200 €.

2. S'il passe n extraits, il lance $1 + 2 + 3 \ldots + n$ fusées, soit $\frac{n(n+1)}{2}$ fusées.

$$\frac{n(n+1)}{2} = 1\,000$$

À l'aide de la calculatrice, on a :

$$\frac{44 \times 45}{2} = 990 \text{ et } \frac{45 \times 46}{2} = 1035.$$

Donc il devra passer 45 extraits.

Il paiera $1\,035 \times 10$, soit 10 350 €.

113. 1. $u_1 = 3u_0 + 4 = 3 \times 2 + 4 = 10$

$u_2 = 3u_1 + 4 = 3 \times 10 + 4 = 34$

2. a) $v_0 = u_0 + 2 = 2 + 2 = 4$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 2 \\ &= 3u_n + 4 + 2 \\ &= 3u_n + 6 \\ &= 3(u_n + 2) \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 3^n$.

d) $v_n = u_n + 2$. Donc $u_n = v_n - 2$.

Donc $u_n = 4 \times 3^n - 2$.

114. 1. $600 \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) + 2\,000 = 2\,480$

En 2020, il y aura 2 480 abonnés.

2. $u_0 = 600$ et $u_1 = 2\,480$

3. Chaque année, 20 % des anciens abonnés ne se réabonnent pas et 2 000 nouvelles personnes s'abonnent.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{20}{100}\right) + 2000 = 0{,}8u_n + 2000$$

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10\,000 \\ &= 0{,}8u_n + 2\,000 - 10\,000 \\ &= 0{,}8u_n - 8\,000 \end{aligned}$$

$= 0{,}8(u_n - 10\ 000)$
$= 0{,}8v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}8$.

b) $v_0 = u_0 - 10\ 000 = 600 - 10\ 000 = -9\ 400$

c) Pour tout $\in \mathbb{N}$:

$v_n = v_0 \times q^n = -9\ 400 \times 0{,}8^n$

d) $v_n = u_n - 10\ 000$

Donc $u_n = v_n + 10\ 000$.

Donc $u_n = -9\ 400 \times 0{,}8^n + 10\ 000$.

e) 2 050 = 2 019 + 31

$u_{31} = -9\ 400 \times 0{,}8^{31} + 10\ 000 \approx 9\ 990$

En 2050, il y aura environ 9 990 abonnés.

115. 1. $u_0 = 5\ 000$

$u_1 = 5\ 000 \times \dfrac{90}{100} + 800 = 5\ 300$

2. Chaque année, 90 % des détenteurs du pass le renouvellent, et 800 nouveaux visiteurs achètent le pass annuel.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} = \dfrac{90}{100} u_n + 800 = 0{,}9u_n + 800$

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$v_{n+1} = u_{n+1} - 8\ 000$
$= 0{,}9u_n + 800 - 8\ 000$
$= 0{,}9u_n - 7\ 200$
$= 0{,}9(u_n - 8\ 000)$
$= 0{,}9v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$.

b) $v_0 = u_0 - 8\ 000 = 5\ 000 - 8\ 000 = -3\ 000$

Pour tout $\in \mathbb{N}$:

$v_n = u_0 \times q^n = -3\ 000 \times 0{,}9^n$

c) $v_n = u_n - 8\ 000$

Donc $u_n = v_n + 8\ 000$.

Donc $u_n = -3\ 000 \times 0{,}9^n + 8\ 000$.

4. 2030 = 2019 + 11

$u_{11} = -3\ 000 \times 0{,}9^{11} + 8\ 000 \approx 7\ 058$

En 2030, il y aura environ 7 058 détenteurs du pass annuel.

Variations et limite d'une suite

116. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = 2(n + 1)^2 - 3(n + 1) + 1 - (2n^2 - 3n + 1)$
$= 2(n^2 + 2n + 1) - 3n - 3 + 1 - 2n^2 + 3n - 1$
$= 2n^2 + 4n + 2 - 3 - 2n^2$
$= 4n - 1$

Donc pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 1.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{3^{n+1}}{2^n}}{\dfrac{3^n}{2^{n-1}}}$$

$$= \frac{3^{n+1}}{2^n} \times \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

$$= \frac{3 \times 3^n \times 2^{n-1}}{2^{n-1} \times 2 \times 3^n}$$

$$= \frac{3}{2}$$

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

117. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} = (n + 1)^3 - (n + 1)^2 + (n + 1)$
$= (n + 1)^2 \times (n + 1) - (n^2 + 2n + 1) + n + 1$
$= (n^2 + 2n + 1) \times (n + 1) - n^2 - 2n - 1 + \mathrm{n} + 1$
$= n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + n + 1 - n^2 - n$
$= n^3 + 2n^2 + 2n + 1$

Donc on a :

$u_{n+1} - u_n = n^3 + 2n^2 + 2n + 1 - (n^3 - n^2 + n)$
$= 3n^2 + n + 1$

Comme $n \geqslant 0$, on a $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

118. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n + 1 - 3}{2(n + 1) + 1} - \frac{n - 3}{2n + 1}$$

$$= \frac{n - 2}{2n + 3} - \frac{n - 3}{2n + 1}$$

$$= \frac{(n-2)(2n+1)-(n-3)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$= \frac{2n^2+n-4n-2-(2n^2+3n-6n-9)}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$= \frac{2n^2+n-4n-2-2n^2-3n+6n+9}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$= \frac{7}{(2n+3)(2n+1)}$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

119. a) On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

b) On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -5$.

c) On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \frac{1}{2}$.

120. a) On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

b) On conjecture que la suite (v_n) n'a pas de limite (elle prend alternativement les valeurs 2 et $\frac{1}{2}$).

c) On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

121. 1. On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. $u_{1\,000} = \frac{1{,}01^{1\,000}}{1\,000} \approx 20{,}96$

$u_{2\,000} = \frac{1{,}01^{2\,000}}{2\,000} \approx 219643{,}10$

$u_{5\,000} = \frac{1{,}01^{5\,000}}{5\,000} \approx 8{,}089 \times 10^{17}$

3. Les résultats ne sont pas cohérents avec la question **1.** On peut penser que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{\dfrac{1{,}01^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{1{,}01^n}{n}} - 1$$

$$= \frac{1{,}01^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{1{,}01^n} - 1$$

$$= \frac{1{,}01n}{n+1} - 1$$

$$= \frac{1{,}01n-(n+1)}{n+1}$$

$$= \frac{0{,}01n-1}{n+1}$$

Or $0{,}01n - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow 0{,}01n \geqslant 1$

$\Leftrightarrow n \geqslant 100$

De plus $n \geqslant 0$, donc $n + 1 > 0$.

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow n \geqslant 100$.

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \Leftrightarrow n \geqslant 100$.

Comme $u_n > 0$, la suite (u_n) est croissante à partir du rang 100.

122. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 2 - (3n+2)$

$= 3n + 3 + 2 - 3n - 2$

$= 3$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2. On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. $u_n \geqslant 5\,000 \Leftrightarrow 3n + 2 \geqslant 5\,000$

$\Leftrightarrow 3n \geqslant 4\,998$

$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{4998}{3}$

$\Leftrightarrow n \geqslant 1\,666$

Le premier entier n tel que $u_n \geqslant 5\,000$ est 1 666.

123. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 2^{n+1}}{3 \times 2^n}$$

$$= \frac{3 \times 2^n \times 2}{3 \times 2^n}$$

$$= 2$$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2. a) Le premier entier n tel que $u_n > 1\,000$ est 9 ($u_8 = 768$ et $u_9 = 1\,536$).

b) Le premier entier n tel que $u_n > 10\,000$ est 12 ($u_{11} = 6\,144$ et $u_{12} = 12\,288$).

c) Le premier entier n tel que $u_n > 100\,000$ est 16 ($u_{15} = 98\,304$ et $u_{16} = 196\,608$).

124. a) Le premier entier n tel que $u_n < -500$ est 5 ($u_4 = -362$ et $u_5 = -1\,091$).

b) Le premier entier n tel que $u_n < -5\,000$ est 7 ($u_6 = -3\,278$ et $u_7 = -9\,839$).

125. 1. Le premier entier n tel que $u_n > 1\,000$ est $N = 32$ ($u_{32} = 1\,124$).

2. $u_{N+1} = u_{33} = 33^2 + 100 \times (-1)^{33} = 989$

Donc $u_{N+1} < 1\,000$.

126. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 1{,}5^{n+1}}{3 \times 1{,}5^n} = \frac{3 \times 1{,}5^n \times 1{,}5}{3 \times 1{,}5^n} = 1{,}5$$

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Donc la suite est strictement croissante.

2.

```
n←0
u←3
Tant que u ⩽ 2 000
    n←n+1
    u←3×1,5^n
Afficher n
```

3. À l'aide de la calculatrice, on en déduit que le premier entier n tel que $u_n > 2\,000$ est $n = 17$ ($u_{16} \approx 1\,970{,}5$ et $u_{17} \approx 2\,955{,}8$).

127. 1. On note S_n le distance totale parcourue depuis le début de la course au moment de la n-ième pause.

$$S_n = \frac{1}{2} \times 42{,}195 + \frac{1}{4} \times 42{,}195 + \ldots + \frac{1}{2^n} \times 42{,}195$$

$$S_n = 42{,}195 \times \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$S_n = 42{,}195 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$S_n = 42{,}195 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$S_n = 42{,}195 \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

À l'aide de la calculatrice, on a $S_{15} \approx 42{,}1937$ et $S_{16} \approx 42{,}1944$.

Donc pour parcourir 42,194, elle devra faire 15 pauses.

2. Pour terminer le marathon, elle doit parcourir 42,195 km. Comme elle ne peut pas faire un pas de moins de 10 cm, on cherche pour quelle valeur de n on a $S_n > 42{,}1949$.

$S_{18} \approx 42{,}19484$ et $S_{19} \approx 42{,}19492$.

Elle devra donc faire 19 pauses pour terminer le marathon.

Travailler autrement

128. Travail de groupe par binôme.

129. On note u_n l'aire des carrés non coloriés à l'étape n.

On a $u_0 = 1^2 = 1$.

Et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{8}{9}u_n$.

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{8}{9}$. Donc on a $u_n = u_0 \times q^n$.

$$u_n = 1 \times \left(\frac{8}{9}\right)^n = \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

Or l'aire des carrés coloriés à l'étape n est $1 - u_n$.

Donc l'aire des carrés coloriés à l'étape n est $1-\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$.

Exercices bilan p. 72

130. Utiliser des suites

1. a) $u_0 = 2 \times 0^2 - 0 - 2 = -2$

$u_1 = 2 \times 1^2 - 1 - 2 = -1$

$u_2 = 2 \times 2^2 - 2 - 2 = 4$

$u_3 = 2 \times 3^2 - 3 - 2 = 13$

$u_4 = 2 \times 4^2 - 4 - 2 = 26$

b) $u_{n+1} = 2(n+1)^2 - (n+1) - 2$

$= 2(n^2 + 2n + 1) - n - 1 - 2$

$= 2n^2 + 4n + 2 - n - 1 - 2$

$= 2n^2 + 3n - 1$

$u_{2n} = 2(2n)^2 - (2n) - 2$

$= 8n^2 - 2n - 2$

$u_n + 1 = 2n^2 - n - 2 + 1$

$= 2n^2 - n - 1$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = 2n^2 + 3n - 1 - (2n^2 - n - 2)$

$= 2n^2 + 3n - 1 - 2n^2 + n + 2$

$= 4n + 1$

$u_{n+1} - u_n > 0$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

d) $u_{10} = 2(10)^2 - 10 - 2 = 188$

$u_{100} = 2(100)^2 - 100 - 2 = 19\,898$

$u_{1\,000} = 2(1\,000)^2 - 1\,000 - 2 = 1\,998\,998$

e) On conjecture que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. a) $w_1 = 2 - \frac{4}{w_0} = 2 - \frac{4}{4} = 1$

$w_2 = 2 - \frac{4}{w_1} = 2 - \frac{4}{1} = -2$

b)

```
w=4
for i in range(1,21):
    w=2-4/w
print(w)
```

c) Il affiche -2.

131. Lecture graphique

1. On a $u_0 = 1$; $u_1 = -2$; $u_2 = 3$; $u_3 = 2$ et $u_4 = -1$.

2. On a $v_0 = -3$; $v_1 = -2$; $v_2 = 1$; $v_3 = 5$ et $v_4 = -2$.

132. Modéliser avec des suites

A. 1. $u_0 = 300$

$u_1 = 300 + 10 = 310$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 10$.

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 10$.

3. $u_n = u_0 + r \times n = 300 + 10n$

4. $2030 = 2019 + 11$

$u_{11} = 300 + 10 \times 11 = 410$

Donc en 2030, le prix de la mutuelle de l'assureur A sera 410 €.

5. $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{24}$

$S = u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r + \ldots + u_0 + 24r$

$S = 25u_0 + r \times (1 + 2 + \ldots + 24)$

$S = 25 \times u_0 + r \times \frac{24 \times 25}{2}$

$S = 25 \times 300 + 10 \times \frac{24 \times 25}{2}$

$S = 10\,500$

Au total, en 25 ans, elle aura payé 10 500 €.

B. 1. $v_0 = 300$

$v_1 = 300 \times \left(1 + \frac{2}{100}\right) = 306$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$v_{n+1} = v_n \times \left(1 + \frac{2}{100}\right) = 1{,}02 v_n$.

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}02$.

3. $v_n = v_0 \times q^n = 300 \times 1{,}02^n$

4. $2030 = 2019 + 11$

$v_{11} = 300 \times 1{,}02^n = 373{,}01$.

Donc en 2030, le prix de la mutuelle de l'assureur B sera 373,01 €.

5. $S = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{24}$

$S = v_0 + v_0 \times q + v_0 \times q^2 + \ldots + v_0 \times q^{24}$

$S = v_0 \times (1 + q + q^2 + \ldots + q^{24})$

$S = v_0 \times \frac{1 - q^{25}}{1 - q}$

$S = 300 \times \frac{1 - 1{,}02^{25}}{1 - 1{,}02}$

$S \approx 9\,609{,}09$

Au total, en 25 ans, elle aura payé 9 609,09 €.

C. On a $u_{49} = 790$ et $v_{49} \approx 791{,}64$.

$2019 + 49 = 2068$

Donc le prix de la mutuelle de l'assureur B devient pour la première fois plus élevé que le prix de la mutuelle de l'assureur A en 2068.

133. 1. $40 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + 25 = 55$

Il aura 55 € dans son porte monnaie le 2 janvier au matin.

2. $u_0 = 40$; $u_1 = 55$ et

$$u_2 = 55 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + 25 = 66{,}25.$$

3. $u_1 - u_0 = 15$ et $u_2 - u_1 = 11{,}25$.

Donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$.

Donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

$$\frac{u_1}{u_0} = 1{,}375 \text{ et } \frac{u_2}{u_1} \approx 1{,}205.$$

$$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$$

Donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

4. Chaque jour, il dépense le quart de ce qu'il a dans son porte-monnaie, et il retire 25 €.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + 25 = 0{,}75u_n + 25$$

5. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 100 \\ &= 0{,}75u_n + 25 - 100 \\ &= 0{,}75u_n - 75 \\ &= 0{,}75\,(u_n - 100) \\ &= 0{,}75v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}75$.

b) $v_0 = u_0 - 100 = 40 - 100 = -60$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$v_n = v_0 \times q^n = -60 \times 0{,}75^n$.

d) $v_n = u_n - 100$

Donc $u_n = v_n + 100$.

Donc $u_n = -60 \times 0{,}75^n + 100$.

e) $u_{14} = -60 \times 0{,}75^{14} + 100 \approx 98{,}93$.

Le 15 janvier au matin, il aura 98,93 € dans son porte-monnaie.

Exercices d'approfondissement p. 73-75

134. Décroissance radioactive

1. $u_0 = 0{,}01$

$$u_1 = 0{,}01 \times \left(1 - \frac{8}{100}\right) = 0{,}0092$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{8}{100}\right) = 0{,}92u_n$$

3. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}92$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_n = u_0 \times q^n = 0{,}01 \times 0{,}92^n$

4. On veut résoudre $u_n < 0{,}001$.

À l'aide de la calculatrice, on a $u_{27} \approx 0{,}00105$ et $u_{28} \approx 0{,}00097$.

Donc la masse d'iode dans le patient devient inférieure à 0,001 mg 28 jours après l'ingestion.

5. On veut résoudre $u_n = \dfrac{u_0}{2} = 0{,}005$.

Avec la calculatrice, on a $u_8 \approx 0{,}0051$ et $u_9 \approx 0{,}0047$.

Donc la demi-vie est comprise entre 8 et 9 jours.

135. Sécurité des mots de passe

1. a) $u_1 = 10$; $u_2 = 10 \times 10 = 100$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 10^n$.

c) $S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{10}$

$S = 10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^{10}$

$S = 10 \times (1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^9)$

$$S = 10 \times \frac{1 - 10^{10}}{1 - 10}$$

$$S = \frac{10}{9} \times (10^{10} - 1) \approx 1{,}11 \times 10^{10}$$

Il doit donc tester environ $1{,}11 \times 10^{10}$ combinaisons.

d) $\dfrac{S}{20000000} \approx 555{,}55$

Il lui faudra 555,55 secondes, soit environ 9,26 minutes.

2. a) $u_1 = 26$; $u_2 = 26 \times 26 = 676$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 26^n$.

c) $S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{10}$

$S = 26 + 26^2 + 26^3 + \ldots + 26^{10}$

$S = 26 \times (1 + 26 + 26^2 + \ldots + 26^9)$

$$S = 26 \times \frac{1 - 26^{10}}{1 - 26}$$

$$S = \frac{26}{25} \times (26^{10} - 1) \approx 1{,}47 \times 10^{14}$$

Il doit donc tester environ $1{,}47 \times 10^{14}$ combinaisons.

d) $\dfrac{S}{20000000} \approx 7\ 340\ 689$

$$\frac{7340689}{60 \times 60 \times 24} = 84{,}96$$

Il lui faudra 7 340 689 secondes, soit environ 84,96 jours.

136. Dénombrement

1. $10 \times 9 \times 8 = 720$

Si $n = 10$, alors il y a 720 combinaisons possibles.

$20 \times 19 \times 18 = 6\,840$

Si $n = 20$ alors il y a 6 840 combinaisons possibles.

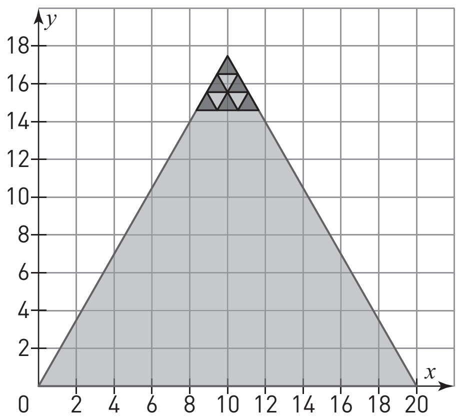
2. Pour tout entier $n \geqslant 3$:

$u_n = n \times (n-1) \times (n-2)$

3. $u_{101} = 999\,900$ et $u_{102} = 1\,030\,200$.

Donc il faut 102 boules pour obtenir un million de combinaisons possibles.

137. Triangles équilatéraux



On peut recouvrir le triangle équilatéral de petits triangles équilatéraux de côté 1 comme ci-dessus.

On note u_n le nombre de triangles sur la n-ième ligne. On a $u_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = u_n + 2$.

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$.

Donc $u_n = u_1 + r \times (n-1)$.

$u_n = 1 + 2 \times (n-1) = 2n - 1$

Le nombre de triangles équilatéraux nécessaires pour recouvrir le triangle est défini par la somme suivante :

$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{20}$

$S = u_1 + u_1 + r + u_1 + 2r + \ldots + u_1 + 19r$

$S = 20 \times u_1 + r \times (1 + 2 + \ldots + 19)$

$$S = 20 \times u_1 + r \times \frac{19 \times 20}{2}$$

$$S = 20 \times 1 + 2 \times \frac{19 \times 20}{2} = 400$$

Il faut donc 400 triangles équilatéraux.

138. Pliage

1. D'après le théorème de Pythagore :

$$u_1 = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200}$$

2. D'après le théorème de Pythagore :

$$u_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}u_n\right)^2 + \left(\frac{1}{2}u_n\right)^2}$$

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{4}u_n^2 + \frac{1}{4}u_n^2}$$

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2}$$

$$u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n$$

3. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$0 < q < 1$ et $u_0 > 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

4. On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

5. $v_0 = 0{,}1 \times 10^{-3}$

$v_1 = 2v_0 = 0{,}2 \times 10^{-3}$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n$.

7. (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.

$q > 1$ et $v_0 > 0$, donc la suite (v_n) est strictement croissante.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_n = v_0 \times q^n = 0{,}1 \times 10^{-3} \times 2^n$

9. On a $v_{21} \approx 209{,}7$ et $v_{22} \approx 419{,}4$.

Il faudrait donc 22 étapes pour atteindre la hauteur de la tour Eiffel.

139. Diagonales d'un polygone

1. Un polygone à 3 côtés est un triangle.

Donc $u_3 = 0$.

Un polygone à 4 cotés est un quadrilatère.

Donc $u_4 = 2$.

Un polygone à 5 cotés est un pentagone.

Donc $u_5 = 5$.

2. Un polygone à n côtés possède n sommets. Chaque sommet peut être relié à $(n-3)$ sommets différents (tous les sommets sauf lui-même et les deux sommets qui lui sont consécutifs).

On obtient alors $n \times (n-3)$ segments. Mais on a compté en double chaque diagonale (par exemple : sommet A à sommet B et sommet B à sommet A).

Donc $u_n = \dfrac{n \times (n-3)}{2}$.

3. $u_{10} = \dfrac{10 \times (10-3)}{2} = 35$

Un polygone à 10 côtés a 35 diagonales.

140. Factorielles

1. $u_1 = 1$; $u_2 = 1 \times 2 = 2$; $u_3 = 1 \times 2 \times 3 = 6$

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = u_n \times (n+1)$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n > 0$.

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = n+1$, donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

4.
```
U=1
for i in range(2,51):
    U=U*i
print(U)
```

5. On a $u_{50} \approx 3{,}0414 \times 10^{64}$.

141. Ricochets

1. On note u_n la distance parcourue par le caillou entre le n-ième rebond et le $(n+1)$-ième rebond.

On a $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n$.

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

Donc $u_n = u_0 \times q^n = 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

La distance totale parcourue par le caillou au moment du 20e rebond est :

$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{19}$

$$= 2 + 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$$

$$= 2 \times \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{19}\right)$$

$$= 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 4 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right)$$

$S = 3{,}9\,999\,962$

Le caillou a parcouru environ 4 mètres.

2. La distance totale parcourue par le caillou au moment du n-ième rebond est :

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$

$$= 2 + 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= 2 \times \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$= 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 4 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)$$

3. Pour un très grand nombre de rebonds, la distance totale parcourue par le caillou se rapproche de 4 mètres.

142. Pile de livres

1. On note u_n le nombre de pages du n-ième livre sur la pile, en partant du bas.

$u_1 = 500$

Et pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = u_n - 10$. Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -10$.

Donc $u_n = u_1 + r \times (n-1)$.

$u_n = 500 - 10 \times (n-1) = 510 - 10n$

Soit S la taille de la pile de 20 livres.

$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{20}$

$= u_1 + u_1 + r + u_1 + 2r + \ldots + u_1 + 19r$

$= 20 \times u_1 + r \times (1 + 2 + \ldots + 19)$

$$= 20 \times u_1 + r \times \frac{19 \times 20}{2}$$

$$= 20 \times 500 + (-10) \times \frac{19 \times 20}{2}$$

$= 8\,100$

Donc la pile de 20 livres contient 8 100 pages.

2. $u_n \geqslant 10 \Leftrightarrow 510 - 10n \geqslant 10$

$\Leftrightarrow -10n \geqslant -500$

$\Leftrightarrow n \leqslant 50$

Il peut donc mettre au maximum 50 livres sur sa pile.

Soit S_2 la taille de la pile de 50 livres.

$S_2 = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{50}$

$= u_1 + u_1 + r + u_1 + 2r + ... + u_1 + 49r$

$= 50 \times u_1 + r \times (1 + 2 + ... + 49)$

$= 50 \times u_1 + r \times \dfrac{49 \times 50}{2}$

$= 50 \times 500 + (-10) \times \dfrac{49 \times 50}{2}$

$= 12\,750$

Donc la pile de 50 livres contiendra 12 750 pages.

143. Somme des n premiers carrés

1. $u_1 = 1^2 = 1$; $u_2 = 1^2 + 2^2 = 5$;

$u_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$u_{n+1} = u_n + (n + 1)^2$

3. a) $v_1 = \dfrac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = 1$

Donc $u_1 = v_1$.

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$v_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$v_n + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

Or $v_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 3n + 4n + 6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

Donc $v_{n+1} = v_n + (n + 1)^2$.

Donc (u_n) et (v_n) ont le même premier terme et la même relation de récurrence. Donc les deux suites sont égales.

Donc pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

144. Somme des n premiers cubes

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. $u_1 = 1^3 = 1$; $u_2 = 1^3 + 2^3 = 9$;

$u_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$

$v_1 = 1$; $v_2 = 1 + 2 = 3$; $v_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

3. On remarque que $u_n = v_n^2$.

4. a) $w_1 = \left(\dfrac{1 \times (1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$

Donc $u_1 = w_1$.

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$w_{n+1} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$w_n + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2[n^2 + 4(n+1)]}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Donc $w_{n+1} = w_n + (n + 1)^3$.

c) $u_{n+1} = u_n + (n + 1)^3$

Donc (u_n) et (w_n) ont le même premier terme et la même relation de récurrence. Donc les suites sont égales.

Donc pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

145. Tour de Hanoï

1. Pour déplacer une pile de deux disques du premier au dernier piquet, il faut un minimum de 3 coups.

2. Pour déplacer une pile de trois disques du premier au dernier piquet, il faut un minimum de 7 coups.

3. $u_1 = 1$; $u_2 = 3$; $u_3 = 7$

4. a) Pour rendre le plus grand disque accessible, il faut un minimum de u_n coups.

b) Pour déplacer le plus grand disque, il faut un minimum de 1 coup.

c) Pour reformer la pile, il faut un minimum de u_n coups.

d) On en déduit donc que

$u_{n+1} = u_n + 1 + u_n = 2u_n + 1.$

5. $u_{15} = 32\,767$

Pour déplacer une pile de 15 disques, il faut un minimum de 32 767 coups.

146. Calcul de la racine carrée chez Héron

1. a) $u_0 = b = 5$

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{a}{u_0}\right) = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{2}{5}\right) = 2{,}7$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{a}{u_1}\right) = \frac{1}{2}\left(2{,}7 + \frac{2}{2{,}7}\right) \approx 1{,}72$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\left(u_2 + \frac{a}{u_2}\right) \approx 1{,}44$$

$$u_4 = \frac{1}{2}\left(u_3 + \frac{a}{u_3}\right) \approx 1{,}41$$

b) On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1{,}4142136$ et $\sqrt{2} \approx 1{,}4142136$.

Donc on conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$.

2. a) $u_0 = b = 10$

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{a}{u_0}\right) = \frac{1}{2}\left(10 + \frac{5}{10}\right) = 5{,}25$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{a}{u_1}\right) = \frac{1}{2}\left(5{,}25 + \frac{5}{5{,}25}\right) \approx 3{,}101$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\left(u_2 + \frac{a}{u_2}\right) \approx 2{,}357$$

$$u_4 = \frac{1}{2}\left(u_3 + \frac{a}{u_3}\right) \approx 2{,}239$$

b) On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2{,}236068$ et $\sqrt{5} \approx 2{,}236068$.

Donc on conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$.

147. Flocon de Von Koch

1. On considère un triangle équilatéral de côté c. Le périmètre du triangle est $3c$.

En utilisant le théorème de Pythagore, la hauteur du triangle est :

$$\sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Donc l'aire du triangle est $\frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

2. $p_0 = 3 \times 1 = 3$

$$a_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

3. On note c_n le nombre de côtés du polygone à l'étape n.

$c_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = c_n \times 4$. Donc (c_n) est une suite géométrique de raison $q = 4$.

Donc $c_n = c_0 \times q^n = 3 \times 4^n$.

On note l_n la longueur de chaque côté du polygone à l'étape n.

$l_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $l_{n+1} = \frac{l_n}{3}$. Donc (l_n) est une suite géométrique de raison $q_2 = \frac{1}{3}$.

Donc $l_n = l_0 \times q_2^n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n = c_n \times l_n = 3 \times 4^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

5. (p_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{3}$ et de premier terme 3.

$\frac{4}{3} > 1$ et $3 > 0$. Donc (p_n) est strictement croissante.

6. On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$.

7. a) Chaque segment à l'étape $n - 1$ crée un nouveau triangle équilatéral à l'étape n.

Donc $u_n = c_{n-1} = 3 \times 4^{n-1}$.

b) $v_n = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times l_n^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)^2$

Donc $v_n = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \dfrac{1}{3^{2n}}$.

$v_n = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \dfrac{1}{9^n}$

c) $a_n = a_0 + u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2 + \ldots + u_n \times v_n$

Or $u_n v_n = 3 \times 4^{n-1} \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \dfrac{1}{9^n}$

$= \dfrac{3\sqrt{3}}{16} \times 4^n \times \dfrac{1}{9^n}$

$= \dfrac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$

Donc

$$a_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{4}{9}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{4}{9}\right)\left[1 + \left(\frac{4}{9}\right) + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{\frac{5}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{9}{5} \times \left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

Donc $a_n = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3\sqrt{3}}{20} \times \left(1-\left(\dfrac{4}{9}\right)^n\right)$.

d) On conjecture que

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3\sqrt{3}}{20} = \dfrac{8\sqrt{3}}{20} = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}$.

Vers la T^le^

148. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} = u_n + 3$ et $v_{n+1} = v_n + 2$

Donc $w_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}$
$= u_n + 3 + v_n + 2$
$= w_n + 5$

Donc (w_n) est une suite arithmétique de raison 5. La bonne réponse est **d)**.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} = u_n \times 3$ et $v_{n+1} = v_n \times 2$.

Donc $w_{n+1} = u_{n+1} \times v_{n+1}$
$= u_n \times 3 \times v_n \times 2$
$= w_n \times 6$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison 6. La bonne réponse est **a)**.

3. Choisissons les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3^n$ et $v_n = 2^n$.

(u_n) est une suite géométrique de raison 3 et (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

$w_0 = \dfrac{u_0 + v_0}{2} = \dfrac{3^0 + 2^0}{2} = 1$

$w_1 = \dfrac{u_1 + v_1}{2} = \dfrac{3^1 + 2^1}{2} = \dfrac{5}{2}$

$w_2 = \dfrac{u_2 + v_2}{2} = \dfrac{3^2 + 2^2}{2} = \dfrac{13}{2}$

$w_1 - w_0 = \dfrac{3}{2}$ et $w_2 - w_1 = \dfrac{8}{2} = 4$

$w_1 - w_0 \neq w_2 - w_1$

Donc la suite (w_n) n'est pas arithmétique.

$\dfrac{w_1}{w_0} = \dfrac{5}{2}$ et $\dfrac{w_2}{w_1} = \dfrac{13}{5}$.

Donc $\dfrac{w_1}{w_0} \neq \dfrac{w_2}{w_1}$.

Donc la suite (w_n) n'est pas géométrique.

La bonne réponse est la **d)**.

149. a) Vrai.

$u_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_0^2 + 12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{0^2 + 12} = \dfrac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$

$u_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_1^2 + 12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 12} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$

$u_3 = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_2^2 + 12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 + 12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{63}{4}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{4}$

b) Vrai.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 4$$
$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}\right)^2 - 4$$
$$= \frac{1}{4} \times (u_n^2 + 12) - 4$$
$$= \frac{1}{4} \times u_n^2 + 3 - 4$$
$$= \frac{1}{4} \times u_n^2 - 1$$
$$= \frac{1}{4} \times (u_n^2 - 4)$$
$$= \frac{1}{4} \times v_n$$

Donc la suite (v_n) est géométrique.

150. 1. Chacun a trinqué exactement une fois avec tous les autres.

Soit n le nombre de personnes.

On a $\frac{n \times (n-1)}{2} = 45$

D'après la calculatrice, $\frac{10 \times 9}{2} = 45$

La bonne réponse est la réponse **c)**.

2. $5\,000 \times \left(1 + \frac{3}{100}\right)^5 \approx 5\,796{,}37$

La bonne réponse est la réponse **d)**.

Travaux pratiques p. 76-77

TP 1. Remboursement d'un emprunt par annuités constantes

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Utiliser les suites pour modéliser un problème : le remboursement d'un emprunt par annuités constantes.

1. $u_1 = \frac{1{,}5}{100} \times 50\,000 = 750$

$v_1 = 3\,000 - 750 = 2\,250$

$w_2 = 50\,000 - 2\,250 = 47\,750$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = 3\,000$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n - v_n$.

5. Dans la colonne E, il faut rentrer 3 000 dans toutes les cases.

6. a) `=1,5/100*B2`

b) `=E2-D2`

c) `=B2-C2`

7.

	A	B	C	D	E
1	n	Montant dû (W_n)	Amortissement (V_n)	Intérêts (U_n)	Annuité
2	1	50000	2250	750	3000
3	2	47750	2283,75	716,25	3000
4	3	45466,25	2318,00625	681,99375	3000
5	4	43148,24375	2352,776344	647,2236563	3000

8. $w_{20} \approx 957{,}39$ et $w_{21} \approx -2\,028{,}25$.

Il lui faudra donc 20 ans pour rembourser son emprunt.

Dans ce TP, nous avons étudié le remboursement d'un emprunt avec annuités constantes. Il existe d'autres méthodes de calcul de remboursement d'un emprunt, par exemple avec des amortissements constants. La durée de l'emprunt et la somme totale des intérêts payés peuvent alors varier.

TP 2. Suite de Syracuse

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Étudier à l'aide d'un algorithme la suite de Syracuse et la conjecture de Syracuse.

1. Si $a = 2$: $u_0 = 2$;

u_0 est pair, donc $u_1 = \frac{u_0}{2} = \frac{2}{2} = 1$;

u_1 est impair, donc $u_2 = 3u_1 + 1 = 4$;

u_2 est pair, donc $u_3 = \frac{u_2}{2} = 2$;

u_3 est pair, donc $u_4 = \frac{u_3}{2} = 1$.

Si $a = 3$:

$u_0 = 3$;

u_0 est impair, donc $u_1 = 3u_0 + 1 = 10$;

u_1 est pair, donc $u_2 = \frac{u_1}{2} = 5$;

u_2 est impair, donc $u_3 = 3u_2 + 1 = 16$;

u_3 est pair, donc $u_4 = \frac{u_3}{2} = 8$.

2. a)

```
def f(a):
    n=0
    u=a
    while u!=1:
        if u%2==0:
            u=u/2
        else:
            u=3*u+1
        n=n+1
print(n)
```

b) Pour a = 5, il affiche 5.

Pour a = 10, il affiche 6.

Pour a = 15, il affiche 17.

TP 3. Les lapins de Fibonacci

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Étudier un problème d'évolution de population à l'aide de suites.

A. 1. Le deuxième mois, il y a un couple de lapin. Le troisième mois, il y a deux couples de lapins.

2. $u_0 = 1$; $u_1 = 1$; $u_2 = 2$;
$u_3 = 2 + 1 = 3$ et $u_4 = 3 + 2 = 5$.

3. $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

4. 2 ans correspond à 24 mois.
$u_{24} = 75\,025$
Donc, après 2 ans, il y aura 75 025 couples de lapins.

5. 1 000 000 de lapins correspond à 500 000 couples de lapins.
$u_{27} = 317\,811$ et $u_{28} = 514\,229$.
Donc, après 28 mois, la popoluation de lapins dépassera 1 000 000 de lapins.

B. 1. Le nombre d'or vaut $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, soit environ 1,6180.

2. $v_0 = \dfrac{u_1}{u_0} = 1$; $v_1 = \dfrac{u_2}{u_1} = 2$;

$v_2 = \dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{3}{2}$; $v_3 = \dfrac{u_4}{u_3} = \dfrac{5}{3}$;

$v_4 = \dfrac{u_5}{u_4} = \dfrac{8}{5}$

3. a) et **b)** Voir la feuille de calcul.

c) Il faut rentrer en B4 la formule : `=B3+B2`.

d) Il faut rentrer en C2 la formule : `=B3/B2`.

	A	B	C
1	n	U_n	V_n
2	0	1	1
3	1	1	2
4	2	2	1,5
5	3	3	1,66666667
6	4	5	1,6
7	5	8	1,625

e) La suite (v_n) semble tendre vers le nombre d'or quand n tend vers $+\infty$.

Le nombre d'or est un nombre particulier, souvent noté φ.
C'est l'unique solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$, et on a $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$.
On le retrouve dans différents contextes : géométrie, peinture, architecture, nature...

En autonomie p. 78-79

Modéliser et calculer avec des suites et étudier leur sens de variation

151. b **152.** c **153.** c

154. a **155.** a **156.** d

157. d **158.** c **159.** b

160. $u_0 = 4$; $u_1 = -1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 1$

161. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$u_{n+1} - u_n = 2(n + 1) + 1 - (2n + 1)$
$= 2n + 2 + 1 - 2n - 1$
$= 2$
Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.
Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

162. a) $u_0 = 1\,500$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} = 0{,}7u_n + 400$.

b) On note u_n le prix que Camille paye pour assister à n cours.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 200 + 20n$.

163. 1. $u_n = 2n$

2. $v_n = 30 + 0{,}5n$

3. $u_{50} = 2 \times 50 = 100$ et $v_{50} = 30 + 0{,}5 \times 50 = 55$.

Si elle se fait livrer 50 fois dans l'année, alors l'abonnement B est le plus rentable.

164. 1. $u_0 = 2$

$$u_1 = \frac{u_0 - 4}{u_0 - 1} = \frac{2-4}{2-1} = -2$$

$$u_2 = \frac{u_1 - 4}{u_1 - 1} = \frac{-2-4}{-2-1} = 2$$

$$u_3 = \frac{u_2 - 4}{u_2 - 1} = \frac{2-4}{2-1} = -2$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} - 1} = \frac{\dfrac{u_n - 4}{u_n - 1} - 4}{\dfrac{u_n - 4}{u_n - 1} - 1} = \frac{u_n - 4 - 4(u_n - 1)}{u_n - 4 - (u_n - 1)} = \frac{-3u_n}{-3}$$

$u_{n+2} = u_n$

3. Si n est pair, alors $u_n = u_0 = 2$.

Si n est impair, alors $u_n = u_1 = -2$.

Reconnaître et utiliser des suites arithmétiques et géométriques et calculer des sommes

165. b	**166. c**	**167. b**
168. a	**169. a**	**170. a**
171. a	**172. d**	**173. b**
174. d	**175. a**	

176. $50 + 2 \times (2\,041 - 2\,019) = 94$

L'arbre mesurera 94 cm en 2041.

177. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \dfrac{c_n}{2}$.

Donc (c_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $c_0 = 1$.

Donc $c_n = 1 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2^n}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = 4c_n = \dfrac{4}{2^n}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = c_n^2 = \dfrac{1}{2^{2n}}$.

178. a) $S = 1 + 2 + \ldots + 100 - (1 + 2 + \ldots + 59)$

$$S = \frac{100 \times 101}{2} - \frac{59 \times 60}{2} = 3280$$

b) $S = \dfrac{1 - 2^{15}}{1 - 2} = 32767$

c) $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{14}$

$= u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r + \ldots + u_0 + 14r$

$= 15 \times u_0 + r \times (1 + 2 + \ldots + 14)$

$= 15 \times 4 + (-0{,}5) \times \dfrac{14 \times 15}{2}$

$= 7{,}5$

d) $S = v_4 + v_4 \times q + \ldots + v_4 \times q^{15-4}$

$= v_4 \times (1 + q + \ldots + q^{11})$

$= v_0 \times q^4 \times \dfrac{1 - q^{12}}{1 - q}$

$= -\dfrac{1}{9} \times 3^4 \times \dfrac{1 - 3^{12}}{1 - 3}$

$= -2\,391\,480$

179. 1. $2\,500 \times \left(1 + \dfrac{4}{100}\right) = 2\,600$

Son salaire en 2020 sera de 2 600 €.

$2\,600 \times \left(1 + \dfrac{4}{100}\right) = 2\,704$

Son salaire en 2021 sera de 2 704 €.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times 1{,}04$.

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 1,04 et de premier terme $u_0 = 2\,500$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\,500 \times 1{,}04^n$.

b) $2\,030 = 2\,019 + 11$; $u_{11} = 2\,500 \times 1{,}04^{11} \approx 3\,848{,}64$

Son salaire en 2030 sera environ de 3 848,64 €.

c) $u_{17} \approx 4\,869{,}75$ et $u_{18} \approx 5\,064{,}54$.

Donc son salaire deviendra supérieur à 5 000 € nets en 2 019 + 18, soit en 2037.

180. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 200 \\
&= 1{,}2u_n - 40 - 200 \\
&= 1{,}2u_n - 240 \\
&= 1{,}2\left(u_n - \frac{240}{1{,}2}\right) \\
&= 1{,}2(u_n - 200) \\
&= 1{,}2v_n
\end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,2.

2. $v_0 = u_0 - 200 = -196$

$1{,}2 > 0$. Or $v_0 < 0$.

Donc la suite (v_n) est strictement décroissante.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -196 \times 1{,}2^n$.

4. Or $v_n = u_n - 200$.

Donc $u_n = v_n + 200$.

$u_n = -196 \times 1{,}2^n + 200$

CHAPITRE 3 Second degré

Manual p. 80-107

I. Introduction

Objectifs du chapitre

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions polynômes de degré 2, en diversifiant les registres (algébrique, graphique).

Dans un premier temps, nous étudierons les fonctions polynômes de degré 2 (forme canonique et sens de variations). Puis nous allons découvrir comment résoudre les équations du second degré. Enfin nous verrons les différentes propriétés des fonctions polynômes de degré 2 (somme et produit des racines, factorisation et signe).

Dans tout le chapitre, nous allons apprendre à résoudre des problèmes variés (équation, inéquation, variations, optimisation) en utilisant les propriétés adaptées vues dans le cours.

Capacités

- → **Déterminer la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré dans des cas simples.**
- → **Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré, déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole.**
- → **Résoudre une équation du second degré.**
- → **Utiliser les propriétés des racines (somme et produit des racines et factorisation).**
- → **Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré et résoudre des inéquations.**
- → **Choisir la forme adaptée pour résoudre un problème.**

II. Corrigés des activités et exercices

Pour prendre un bon départ p. 81

1. Utiliser les identités remarquables

1. Pour tous réels a et b, on a :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

2. $\mathrm{A} = x^2 + 2x + 1$

$\mathrm{B} = 4x^2 - 12x + 9$

$\mathrm{C} = x^2 - 25$

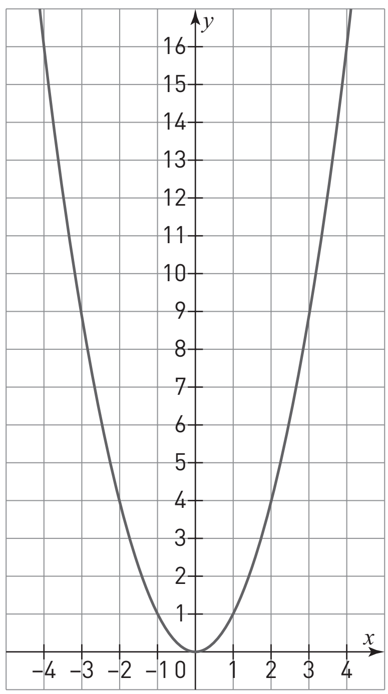
3. $\mathrm{D} = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

$\mathrm{E} = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x - 3)^2$

$\mathrm{F} = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 4 + 4^2 = (3x - 4)^2$

2. Connaître les propriétés de la fonction carré

1.



2. Soit f la fonction carré.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘	0	↗	

3. Résoudre des équations avec la fonction carré

a) $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = 4$

Donc $\mathcal{S} = \{-4\ ;\ 4\}$.

b) $x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$

Donc $\mathcal{S} = \{-\sqrt{7}\ ;\ \sqrt{7}\}$.

c) $x^2 = -4$

Donc $\mathcal{S} = \varnothing$.

d) $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Donc $\mathcal{S} = \{0\}$.

4. Résoudre des équations avec un produit nul

1. $(x-3)(x+1) \Leftrightarrow x - 3 = 0$ ou $x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -1$

Donc $\mathcal{S} = \{-1\ ;\ 3\}$.

2. a) $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

Donc $\mathcal{S} = \{0\ ;\ 2\}$.

b) $2x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(2x+3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $2x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\dfrac{3}{2}$

Donc $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{3}{2}\ ;\ 0\right\}$.

5. Savoir utiliser un tableau de variations

1. Le minimum de f est -20 et il est atteint en 2.

2. Le maximum de f est 15 et il est atteint en -5.

3. $-1 < 1$

Or f est strictement décroissante sur $[-5\ ;\ 2]$.

Donc $f(-1) > f(1)$.

4. On ne peut pas comparer $f(0)$ et $f(4)$ car $0 \in\ ]-5\ ;\ 2[$ et $4 \in\ ]2\ ;\ 5[$.

6. Dresser un tableau de signes

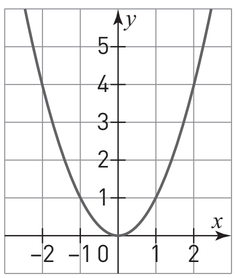
	x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		2		$+\infty$
a)	$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
b)	$3x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
c)	$(2x+1)(3x-6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
d)	$\dfrac{2x+1}{3x-6}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

Activités p. 82-83

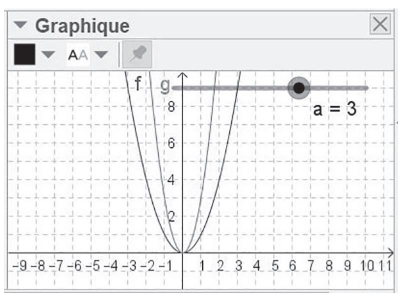
Activité 1. Découvrir les fonctions polynômes de degré 2

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Découvrir les fonctions polynômes de degré 2 avec une approche graphique.

1. et **2.**



A. 1. 2. et **3.**



4. Si $a > 0$, on a :

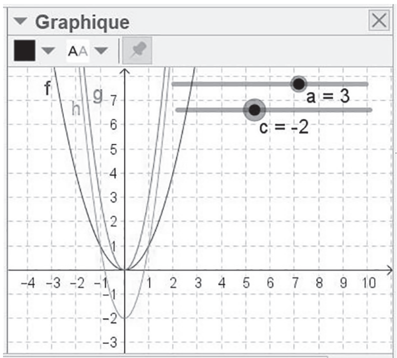
x	$-\infty$		0		$+\infty$
g		↘	0	↗	

Si $a < 0$, on a :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g	$\nearrow$	0	$\searrow$

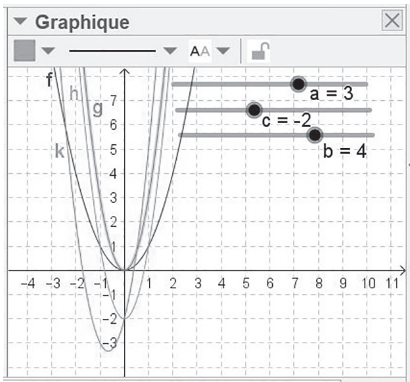
Si $a = 0$, alors la fonction g est constante.

B. 1. 2. et **3.**



4. g et h ont les mêmes sens de variations.

C. 1. 2. 3.



4. Si h est strictement décroissante, puis strictement croissante, alors k aussi.

Si h est strictement croissante, puis strictement décroissante, alors k aussi.

Activité 2. Utiliser la méthode du mathématicien Al-Khwarizmi

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Utiliser la méthode historique du mathématicien Al-Khwarizmi pour résoudre des équations du second degré.

1. a) Aire(ABCD)= x^2

b) Aire(BEFC) = Aire(DCGH) = $5x$

c) Aire(AEIH) = AE^2 = $(x + 5)^2$ et Aire(AEIH) = Aire(ABCD) + Aire(BEFC) + Aire(DCGH) + Aire(CFIG)

Aire(AEIH) = $x^2 + 5x + 5x + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

d) D'après la question précédente, $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$.

Donc $x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25$.

Donc $x^2 + 10x = 39 \Leftrightarrow (x + 5)^2 - 25 = 39$

$\Leftrightarrow (x + 5)^2 = 64$

e) $x^2 + 10x = 39 \Leftrightarrow (x + 5)^2 = 64$

$\Leftrightarrow x + 5 = 8$ ou $x + 5 = -8$

$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -13$

Donc la solution positive de $x^2 + 10 = 39$ est $x = 3$.

2. a) $2x^2 + 10x = 48 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 24$

b) On construit un carré ABCD de côté x et deux rectangles BEFC et DCGH, de côté 2,5 et x.

On trace ensuite le carré CFIG.

Aire(AEIH) = $(x + 2{,}5)^2$

et Aire(AEIH) = $x^2 + 2{,}5x + 2{,}5x + 2{,}5^2 = x^2 + 5x + 6{,}25$

Donc $x^2 + 5x + 6{,}25 = (x + 2{,}5)^2$.

Donc $x^2 + 5x = (x + 2{,}5)^2 - 6{,}25$.

$x^2 + 5x = 24 \Leftrightarrow (x + 2{,}5)^2 - 6{,}25 = 24$

$\Leftrightarrow (x + 2{,}5)^2 = 30{,}25$

$\Leftrightarrow x + 2{,}5 = 5{,}5$ ou $x + 2{,}5 = -5{,}5$

$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -8$

Donc la solution positive de l'équation $2x^2 + 10x = 48$ est $x = 3$.

Activité 3. Résoudre des équations du second degré

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Résoudre des équations du second degré.

A. 1. a) $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -4$

Donc $\mathcal{S} = \{-4 ; 4\}$.

b) $x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt{8}$ ou $x = -\sqrt{8}$

Donc $\mathcal{S} = \{-\sqrt{8} ; \sqrt{8}\}$.

c) $\mathcal{S} = \varnothing$ car un carré est toujours positif.

d) $(x - 3)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0$ ou $x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -2$

Donc $\mathcal{S} = \{-2 ; 3\}$.

2. a) $x^2 + 10x = x \times (x + 10)$

b) $x^2 + 10x \Leftrightarrow x \times (x + 10) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -10$

Donc $\mathcal{S} = \{-10 ; 0\}$.

B. 1. $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

2. $x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 + (-1)$

3. $x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 - 1^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2 + 1)(x + 2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x + 3 = 0$ ou $x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -3$ ou $x = -1$

Donc $\mathcal{S} = \{-3 ; -1\}$.

Activité 4. Étudier le signe d'un trinôme

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Étudier le signe d'un trinôme.

1. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 3$

Donc $\mathcal{S} = \{1 ; 3\}$.

$f(x) > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$

Donc $\mathcal{S} =]1 ; 3[$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Donc $\mathcal{S} = \{1\}$.

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$ou $x > 1$

Donc $\mathcal{S} =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

c) $f(x) = 0$. On a $\mathcal{S} = \varnothing$.

$f(x) > 0$. On a $\mathcal{S} = \varnothing$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

2.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

À vous de jouer ! p. 90-93

1. a) Pour tout réel x : $f(x) = x^2 + x + 1$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

b) Pour tout réel x :

$g(x) = 3x^2 - 12x + 21$

$= 3(x^2 - 4x + 7)$

$= 3[(x - 2)^2 - 2^2 + 7]$

$= 3[(x - 2)^2 + 3]$

$= 3(x - 2)^2 + 9$

2. 1. Pour tout réel x :

$f(x) = -2x^2 + 4x - 6$

$= -2(x^2 - 2x + 3)$

$= -2[(x - 1)^2 - 1^2 + 3]$

$= -2[(x - 1)^2 + 2]$

$= -2(x - 1)^2 - 4$

2. $f(x) = -4 \Leftrightarrow -2(x - 1)^2 - 4 = -4$

$\Leftrightarrow -2(x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

Donc $\mathcal{S} = \{1\}$.

3. a) $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-1}{2 \times 1} = \dfrac{1}{2}$;

$\beta = f(\alpha) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{7}{4}$;

$a = 1 > 0$, donc on a :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f		↘	$\frac{7}{4}$	↗	

b) $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{12}{2 \times (-3)} = 2$;

$\beta = g(\alpha) = -3 \times 2^2 + 12 \times 2 + 21 = 33$

$a = -3 < 0$, donc on a :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
g	$\nearrow$	33	$\searrow$

4. $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2\times 2} = 1$;

$\beta = f(\alpha) = 2\times 1^2 - 4\times 1 + 10 = 8$;

$a = 2 > 0$, donc on a :

x	-10	1	10
f	250 $\searrow$	8	$\nearrow$ 170

Le minimum de f est 8 et il est atteint en 1.

Le maximum de f est 250 et il est atteint en -10.

5. 1. a) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 1^2 - 4\times 2\times 3 = -23 < 0$

Donc $\mathcal{S} = \varnothing$.

b) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 6^2 - 4\times 9\times 1 = 0$

Donc l'équation admet une unique solution.

$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{2\times 9} = -\dfrac{1}{3}$

Donc $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

c) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times(-2) = 9 > 0$

Donc l'équation admet deux solutions distinctes.

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\times 1} = -1$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times 1} = 2$

Donc $\mathcal{S} = \{-1 ; 2\}$.

2. a) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-21)^2 - 4\times 6\times 9 = 225 > 0$

Donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes.

b) $f(1) = 6\times 1^2 - 21\times 1 + 9 = -6$

$f(1) \neq 0$ donc 1 n'est pas solution de l'équation $f(x) = 0$.

c) $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{21-\sqrt{225}}{2\times 6} = \dfrac{1}{2}$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{21+\sqrt{225}}{2\times 6} = 3$

Donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{2} ; 3\right\}$.

6. 1. a) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 2^2 - 4\times(-1)\times(-3) = -8 < 0$

Donc la fonction n'admet pas de racine réelle.

b) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 1^2 - 4\times 1\times\dfrac{1}{4} = 0$

Donc la fonction admet une unique racine réelle.

$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{2\times 1} = -\dfrac{1}{2}$

L'unique racine réelle est $-\dfrac{1}{2}$.

c) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 2^2 - 4\times 2\times(-12) = 100 > 0$

Donc la fonction admet deux racines réelles distinctes.

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-\sqrt{100}}{2\times 2} = -3$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+\sqrt{100}}{2\times 2} = 2$

Les deux racines réelles sont -3 et 2.

2. a) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4\times 4\times 10 = -135 < 0$

Donc $\mathcal{S} = \varnothing$.

b) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4\times 3\times(-60) = 729 > 0$

Donc l'équation admet deux solutions distinctes.

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-3)-\sqrt{729}}{2\times 3} = -4$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-3)+\sqrt{729}}{2\times 3} = 5$

Donc $\mathcal{S} = \{-4 ; 5\}$.

c) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-24)^2 - 4\times 72\times 2 = 0$

Donc l'équation admet une unique solution.

$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-24}{2\times 72} = \dfrac{1}{6}$

Donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{6}\right\}$.

7. 1. $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = \left(-\frac{49}{2}\right)^2 - 4 \times (-7) \times 14 = 992{,}25$$

$\Delta > 0$, donc la fonction admet deux racines réelles distinctes.

2. $f(-4) = -7 \times (-4)^2 - \dfrac{49}{2} \times (-4) + 14 = 0$

Donc -4 est une racine de f.

3. Le produit des racines est égal à $\dfrac{c}{a}$.

Donc $x_1 \times x_2 = \dfrac{14}{-7}$.

$-4 \times x_2 = -2$

Donc $x_2 = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2}$.

La valeur de l'autre racine est $\dfrac{1}{2}$.

8. a) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-9) = 144 > 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{144}}{2 \times 3} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{144}}{2 \times 3} = 1$$

De plus, $a = 3$.

Donc pour tout réel x :

$f(x) = 3(x - (-3))(x - 1)$

$f(x) = 3(x + 3)(x - 1)$

b) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 7 = -19 < 0$

Donc $g(x)$ ne peut pas s'écrire comme un produit de polynôme de degré 1.

c) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 16 \times 1 = 0$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \times 16} = \frac{1}{4}$$

De plus, $a = 16$. Donc pour tout réel x :

$$h(x) = 16\left(x - \frac{1}{4}\right)^2.$$

9. 1. $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 3{,}3^2 - 4 \times 3 \times 0{,}3 = 7{,}29$

$\Delta > 0$, donc la fonction admet deux racines réelles distinctes.

2. $g(1) = 3 \times 1^2 - 3{,}3 \times 1 + 0{,}3 = 0$

Donc 1 est une racine de g.

3. Le produit des racines est égal à $\dfrac{c}{a}$.

Donc $x_1 \times x_2 = \dfrac{0{,}3}{3}$.

$1 \times x_2 = 0{,}1$

Donc $x_2 = 0{,}1$.

La valeur de l'autre racine est 0,1.

10. 1. $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-59)^2 - 4 \times (-5) \times 12 = 3\,721 > 0$

h admet deux racines distinctes.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-59) - \sqrt{3721}}{2 \times (-5)} = 0{,}2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-59) + \sqrt{3721}}{2 \times (-5)} = -12$$

Donc les deux racines de h sont -12 et 0,2.

2. $a = -5$.

Donc pour tout réel x :

$h(x) = -5(x - (-12))(x - 0{,}2)$

$h(x) = -5(x + 12)(x - 0{,}2)$

11. a) $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 8 = 0$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \times \frac{1}{2}} = 4$$

De plus, $a = \dfrac{1}{2} > 0$, donc on a :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f(x)$		+	0	+	

b) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-9) = 144 > 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{144}}{2 \times 3} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{144}}{2 \times 3} = 1$$

De plus, $a = 3 > 0$, donc on a :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$g(x)$		+	0	–	0	+	

c) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4^2 - 4 \times (-2) \times (-5) = -24 < 0$

De plus, $a = -2 < 0$, donc on a :

x	$-\infty$		$+\infty$
$h(x)$		–	

12. a) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 15^2 - 4 \times 5 \times 10 = 25 > 0$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-15-\sqrt{25}}{2\times 5} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-15+\sqrt{25}}{2\times 5} = -1$$

De plus, $a = 5 > 0$, donc on a :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$5x^2 + 15x + 10$		+	0	–	0	+	

Donc $\mathcal{S} =]-2\,;-1[$.

b) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 0$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2\times 2} = 2$$

De plus, $a = 2 > 0$, donc on a :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2x^2 - 8x + 8$		+	0	+	

Donc $\mathcal{S} = \{2\}$.

c) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 10 = -55 < 0$

De plus, $a = 2 > 0$, donc on a :

x	$-\infty$		$+\infty$
$2x^2 - 5x + 10$		+	

Donc $\mathcal{S} = \varnothing$.

13. 1. $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 14^2 - 4 \times 7 \times (-56) = 1\,764 > 0$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14-\sqrt{1764}}{2\times 7} = -4$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14+\sqrt{1764}}{2\times 7} = 2$$

De plus, $a = 7 > 0$, donc on a :

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$f(x)$		+	0	–	0	+	

2. $f(x) \geqslant 0$

On a $\mathcal{S} =]-\infty\,;-4] \cup [2\,;+\infty[$.

14. 1. $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 60^2 - 4 \times (-100) \times (-9) = 0$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{60}{2\times(-100)} = 0{,}3$$

De plus, $a = -100 < 0$, donc on a :

x	$-\infty$		$0{,}3$		$+\infty$
$g(x)$		–	0	–	

2. $g(x) < 0$

On a $\mathcal{S} =]-\infty\,;0{,}3[\cup]0{,}3\,;+\infty[$.

Exercices d'application p. 94-96

Apprendre à apprendre

15. 1. a) et **b)** **2. c)** et **d)**

3. c) et **d)**

16. 1. Par exemple : $f(x) = x^2 + x + 1$.

2. $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\times 1} = -\frac{1}{2}$

$$\beta = f(\alpha) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{3}{4}$$

$a = 1 > 0$ donc on a :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f		↘	$\frac{3}{4}$	↗	

3. $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$

De plus, $a = 1 > 0$, donc on a :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		+	

Questions – Flash

17. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 5(x + 1)(x - 6) = 0$

$\Leftrightarrow 5 = 0$ ou $x + 1 = 0$ ou $x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 6$

Donc $\mathcal{S} = \{-1 ; 6\}$.

18. $\alpha = 5$; $\beta = 13$ et $a = -2 < 0$, donc on a :

x	$-\infty$		5		$+\infty$
f		$\nearrow$	13	$\searrow$	

19. $f(x) = 1^2 + 1 - 2 = 0$

20. Pour tout réel x :

$$f(x) = x^2 + x - 2$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2$$

Donc $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$.

21. $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \times 1} = -\frac{1}{2}$

$$\beta = f(\alpha) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = -\frac{9}{4}$$

$a = 1 > 0$, donc on a :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f		$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	

22. $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$

23. $\Delta = 9 > 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 1$$

Donc $\mathcal{S} = \{-2 ; 1\}$.

24. $\Delta = 9 > 0$; $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$.

Or $a = 1 > 0$, donc on a :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

25. $x_1 = 7$; $x_2 = -2$ et $a = 4$.

Donc pour tout réel x :

$f(x) = 4(x - 7)(x - (-2))$

$f(x) = 4(x - 7)(x + 2)$

26. $x_1 = 2$; $x_2 = -9$ et $a = 3 > 0$, donc :

x	$-\infty$		-9		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\mathcal{S} =]-\infty ; -9[\cup]2 ; +\infty[$.

Fonctions polynômes de degré 2

27. a) f est une fonction polynôme de degré 2, avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = -\sqrt{2}$.

b) g n'est pas une fonction polynôme de degré 2 car elle n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ et $g(x)$ n'est pas de la forme $ax^2 + bx + c$.

c) h n'est pas une fonction polynôme de degré 2. C'est une fonction affine.

28. a) Pour tout réel x, $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

Donc f est une fonction polynôme de degré 2, avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = 1$.

b) Pour tout réel x, $g(x) = x^2 - 1$.

Donc g est une fonction polynôme de degré 2, avec $a = 1$, $b = 0$ et $c = -1$.

c) Pour tout réel x :

$h(x) = x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1)$

$= x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1$

$= 4x$

Donc h n'est pas une fonction polynôme de degré 2. C'est une fonction affine.

29. 1. Pour tout réel x :

$f(x) = 2(x^2 + 4x + 4) - 3x - 3$

$= 2x^2 + 8x + 8 - 3x - 3$

$= 2x^2 + 5x + 5$

2. Donc f est une fonction polynôme de degré 2, avec $a = 2$, $b = 5$ et $c = 5$.

30. a) Pour tout réel x :

$f(x) = (x + 1)^2(x + 1) - x^3$

$= (x^2 + 2x + 1)(x + 1) - x^3$

$= x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + x + 1 - x^3$

$= 3x^2 + 3x + 1$

Donc f est une fonction polynôme de degré 2, avec $a = 3$, $b = 3$ et $c = 1$.

b) g n'est pas définie sur $\mathbb{R}$, donc g n'est pas une fonction polynôme de degré 2.

Forme canonique

31. 1. $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

2. Pour tout réel x :

$f(x) = x^2 + 4x + 4 + 1$.

Donc $f(x) = (x + 2)^2 + 1$.

32. 1. Pour tout réel x :

$-3(x - 4)^2 + 7 = -3(x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2) + 7$

$= -3(x^2 - 8x + 16) + 7$

$= -3x^2 + 24x - 48 + 7$

$= -3x^2 + 24x - 41$

2. Donc pour tout réel x :

$f(x) = -3(x - 4)^2 + 7$

33. a) Pour tout réel x :

$f(x) = x^2 - 6x + 5$

$= (x - 3)^2 - 3^2 + 5$

$= (x - 3)^2 - 4$

b) Pour tout réel x :

$f(x) = x^2 + 5x + 4$

$$= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4$$

$$= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

34. 1. Pour tout réel x :

$f(x) = 2x^2 + 4x + 8$

$= 2(x^2 + 2x + 4)$

2. Pour tout réel x :

$f(x) = 2[(x + 1)^2 - 1^2 + 4]$

$= 2[(x + 1)^2 + 3]$

$= 2(x + 1)^2 + 6$

35. a) Pour tout réel x :

$f(x) = 3x^2 + 9x + 5$

$$= 3\left(x^2 + 3x + \frac{5}{3}\right)$$

$$= 3\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{3}\right]$$

$$= 3\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{12}\right]$$

$$= 3\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}$$

b) Pour tout réel x :

$f(x) = -2x^2 + 2x + 2$

$= -2(x^2 - x - 1)$

$$= -2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right]$$

$$= -2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right]$$

$$= -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$$

Variations et courbe représentative

36. a) Le sommet a pour coordonnées (2 ; 1), l'axe de symétrie a pour équation $x = 2$ et $a < 0$.

b) Le sommet a pour coordonnées (−1 ; −2), l'axe de symétrie a pour équation $x = -1$ et $a > 0$.

37. 1. $a = -3 < 0$. Donc f admet un maximum sur $\mathbb{R}$.

2. $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{9}{2 \times (-3)} = \dfrac{3}{2}$

$$\beta = f(\alpha) = -3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 9 \times \left(\frac{3}{2}\right) - 5 = \frac{7}{4}$$

Donc on a :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
f	↗	$\frac{7}{4}$	↘

38. 1. $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{2\times 3} = -1$

$\beta = f(\alpha) = 3 \times (-1)^2 + 6 \times (-1) - 7 = -10$

$a = 3 > 0$, donc on a :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f	$\searrow$	-10	$\nearrow$

2. f admet un minimum qui vaut -10 et qui est atteint en -1.

39. a) $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{0}{2\times 3} = 0$

$\beta = f(\alpha) = 3 \times 0^2 + 4 = 4$

$a = 3 > 0$, donc f admet un minimum qui vaut 4 et qui est atteint en 0.

b) D'après la forme canonique, $\alpha = 4$ et $\beta = 8$. $a = -2 < 0$, donc g admet un maximum qui vaut 8 et qui est atteint en 4.

c) $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{8}{2\times(-2)} = 2$

$\beta = h(\alpha) = -2 \times 2^2 + 8 \times 2 - 1 = 7$

$a = -2 < 0$, donc h admet un maximum qui vaut 7 et qui est atteint en 2.

d) D'après la forme canonique, $\alpha = -1$ et $\beta = -25$. $a = 7 > 0$ donc k admet un minimum qui vaut -25 et qui est atteint en -1.

40. a) $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{2\times 1} = -\dfrac{1}{2}$

$\beta = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 1 = \dfrac{3}{4}$

Donc la parabole admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ et comme sommet le point de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2} ; \dfrac{3}{4}\right)$.

b) $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2\times 2} = 1$

$\beta = 2 \times 1^2 - 4 \times 1 + 5 = 3$

Donc la parabole admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x = 1$ et comme sommet le point de coordonnées $(1 ; 3)$.

c) $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{2\times 1} = -3$

$\beta = (-3)^2 + 6 \times (-3) - 3 = -12$

Donc la parabole admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x = -3$ et comme sommet le point de coordonnées $(-3 ; -12)$.

d) $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{2\times(-4)} = \dfrac{3}{4}$

$\beta = -4 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + 6 \times \left(\dfrac{3}{4}\right) - 2 = \dfrac{1}{4}$

Donc la parabole admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x = \dfrac{3}{4}$ et comme sommet le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{4} ; \dfrac{1}{4}\right)$.

41. 1. $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-16}{2\times 2} = 4$

Donc l'axe de symétrie de la parabole est la droite d'équation $x = 4$.

2. $y = 2x^2 - 16x + 1$

$2 \times 0^2 - 16 \times 0 + 1 = 1$

Donc l'ordonnée du point d'abscisse 0 est 1.

3. Par symétrie de la courbe, l'ordonnée du point d'abscisse 8 est 1.

Factorisation et équations

42. a) $f(x) = x \times (x + 5)$

b) $f(x) = 2x \times (x - 5)$

43. a) $f(x) = x^2 - 11^2$

$f(x) = (x - 11)(x + 11)$

b) $f(x) = x^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2$

$f(x) = \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$

c) $f(x) = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 2 + 2^2$

$f(x) = (5x - 2)^2$

d) $f(x) = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 4 + 4^2$

$f(x) = (3x + 4)^2$

44. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x = 0$

$\Leftrightarrow 2x \times (x - 5) = 0$

$\Leftrightarrow 2x = 0$ ou $x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 5$

Donc $\mathcal{S} = \{0 ; 5\}$.

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 36 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 6) \times (x + 6) = 0$
$\Leftrightarrow x - 6 = 0$ ou $x + 6 = 0$
$\Leftrightarrow x = 6$ ou $x = -6$
Donc $\mathcal{S} = \{-6 ; 6\}$.
c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = -1$
Donc $\mathcal{S} = \{-1\}$.
d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0$
$\Leftrightarrow (2x - 3)^2 = 0$
$\Leftrightarrow 2x - 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$
Donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

45. a) $x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x \times (x + 2) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x + 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -2$
Donc $\mathcal{S} = \{-2 ; 0\}$.
b) $(x - 1)^2 - 3 = -3 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$
Donc $\mathcal{S} = \{1\}$.
c) $2(x - 1)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow 2 = 0$ ou $x - 1 = 0$ ou $x + 5 = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -5$
Donc $\mathcal{S} = \{-5 ; 1\}$.
d) $2x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 5) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $2x - 5 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{5}{2}$
Donc $\mathcal{S} = \left\{0 ; \dfrac{5}{2}\right\}$.

46. a) $9x^2 - 12x + 4 = 0 \Leftrightarrow (3x - 2)^2 = 0$
$\Leftrightarrow 3x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$
Donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

b) $(x + 1)^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 7$
$\Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{7}$ ou $x + 1 = -\sqrt{7}$
$\Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{7}$ ou $x = -1 - \sqrt{7}$
Donc $\mathcal{S} = \{-1 - \sqrt{7} ; -1 + \sqrt{7}\}$.
c) $x^2 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$
$\Leftrightarrow x \times (x - 3) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$
Donc $\mathcal{S} = \{0 ; 3\}$.
d) $x^2 - 6x + 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0$
$\Leftrightarrow x \times (x - 6) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 6 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 6$
Donc $\mathcal{S} = \{0 ; 6\}$.

Discriminant et racines

47. a) $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4$
b) $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$
c) $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-2) \times (-7) = -40$
d) $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 16$

48. a) $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$
Donc l'équation admet deux solutions réelles.
b) $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 7 = -31 < 0$
Donc l'équation n'admet aucune solution réelle.
c) $\Delta = 2^2 - 4 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right) \times (-3) = 0$
Donc l'équation admet une unique solution réelle.
d) $\Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times 11 = -39 < 0$
Donc l'équation n'admet aucune solution réelle.

49. a) La courbe ne coupe pas l'axe des abscisses. Donc $\Delta < 0$.
b) La courbe coupe une fois l'axe des abscisses. Donc $\Delta = 0$.
c) La courbe coupe deux fois l'axe des abscisses. Donc $\Delta > 0$.

50. a) $\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 225 > 0$
Donc l'équation admet deux solutions réelles.
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-9) - \sqrt{225}}{2 \times 3} = -1$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-9)+\sqrt{225}}{2\times 3} = 4$

Donc $\mathcal{S} = \{-1 \,;\, 4\}$.

b) $\Delta = b^2 - 4ac$

Donc $\Delta = 5^2 - 4\times 2\times 7 = -31 < 0$.

Donc l'équation n'admet aucune solution réelle. $\mathcal{S} = \varnothing$.

c) $\Delta = b^2 - 4ac$

Donc $\Delta = (-2)^2 - 4\times 2\times \dfrac{1}{2} = 0$.

Donc l'équation admet une unique solution réelle.

$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2\times 2} = \dfrac{1}{2}$

Donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

51. a) $3x^2 - 5x = -25 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 25 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4\times 3\times 25 = -275 < 0$

Donc l'équation n'admet aucune solution réelle. $\mathcal{S} = \varnothing$

b) $4x^2 - 2x - 7 = 4 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 11 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4\times 4\times (-11) = 180 > 0$

Donc l'équation admet deux solutions réelles.

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-2)-\sqrt{180}}{2\times 4} = \dfrac{2-\sqrt{180}}{8}$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-2)+\sqrt{180}}{2\times 4} = \dfrac{2+\sqrt{180}}{8}$

Donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{2-\sqrt{180}}{8} \,;\, \dfrac{2+\sqrt{180}}{8}\right\}$.

52. a) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 3^2 - 4\times(-2)\times(-4) = -23 < 0$

Donc le trinôme n'admet aucune racine.

b) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4\times \dfrac{1}{2}\times 8 = 0$

$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2\times \dfrac{1}{2}} = 4$

Donc le trinôme admet une unique racine qui est 4.

c) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4\times(-1)\times 35 = 144 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-2)-\sqrt{144}}{2\times(-1)} = 5$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-2)+\sqrt{144}}{2\times(-1)} = -7$

Donc le trinôme admet deux racines distinctes, qui sont -7 et 5.

Propriétés des racines

53. 1. $f(-1) = 2\times(-1)^2 - 8\times(-1) - 10 = 0$

$f(5) = 2\times 5^2 - 8\times 5 - 10 = 0$

Donc -1 et 5 sont les racines de f.

2. f admet deux racines distinctes.

Donc pour tout réel x, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Donc $f(x) = 2(x+1)(x-5)$.

54. 1 D'après la calculatrice, on a $f(1) = 0$ et $f(6) = 0$.

Donc les deux racines de f sont 1 et 6.

2. f admet deux racines distinctes.

Donc pour tout réel x :

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Donc $f(x) = 2(x-1)(x-6)$.

55. a) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 5^2 - 4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times(-12{,}5) = 0$

$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{5}{2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)} = 5$

Donc pour tout réel x :

$f(x) = a(x - x_0)^2 = -\dfrac{1}{2}(x-5)^2$

b) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4^2 - 4\times 4\times(-8) = 144 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-\sqrt{144}}{2\times 4} = -2$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4+\sqrt{144}}{2\times 4} = 1$

Donc pour tout réel x :

$g(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Donc $g(x) = 4(x-1)(x+2)$.

c) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 2{,}4 = -24{,}8 < 0$

On ne peut pas écrire $h(x)$ comme un produit de polynômes de degré 1.

56. 1. Pour tout réel x :

$f(x) = 4(x-1)^2 - 16$

$f(x) = [2(x-1)]^2 - 4^2$

2. $f(x) = [2(x-1) - 4] \times [2(x-1) + 4]$

$f(x) = (2x - 2 - 4) \times (2x - 2 + 4)$

$f(x) = (2x - 6) \times (2x + 2)$

$f(x) = 2(x - 3) \times 2(x + 1)$

$f(x) = 4(x - 3)(x + 1)$

57. 1. $\Delta = b^2 - 4ac$

Donc $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 17$.

2. $\Delta > 0$, donc f admet deux racines distinctes.

3. La somme des racines vaut $-\frac{b}{a} = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2}$.

Le produit des racines vaut $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

58. 1. $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 5 \times (-1) = 36 > 0$

Donc f admet deux racines distinctes.

2. $f(1) = 5 \times 1^2 - 4 \times 1 - 1 = 0$

3. Le produit des racines vaut $\frac{c}{a}$.

Donc $x_1 \times x_2 = -\frac{1}{5}$.

Donc $1 \times x_2 = -\frac{1}{5}$.

$x_2 = -\frac{1}{5}$

Donc les racines de f sont 1 et $-\frac{1}{5}$.

Résolution d'inéquations et signes

59. a)

x	$-\infty$	+	-2		3		$+\infty$
$x+2$		−	0	+		+	
$x-3$		−		−	0	+	
$2(x+2)(x-3)$		+	0	−	0	+	

b)

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$		+	0	+	
$-2\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$		−	0	−	

c)

x	$-\infty$		$+\infty$
$x^2 + 5$		+	

60. a) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (-16) = 144 > 0$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - \sqrt{144}}{2 \times 2} = -2$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + \sqrt{144}}{2 \times 2} = 4$

$a = 2 > 0$, donc on a :

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

b) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 24^2 - 4 \times 9 \times 16 = 0$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{24}{2 \times 9} = -\frac{4}{3}$

$a = 9 > 0$, donc on a :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
$g(x)$		+	0	+	

c) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 6 = -23 < 0$

$a = 2 > 0$, donc on a :

x	$-\infty$		$+\infty$
$h(x)$		+	

61. a) $x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x(x-2) > 0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
x^2+2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\mathcal{S} =]-\infty\,;0[\cup]2\,;+\infty[$.

b) $x^2 - 81 \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \leqslant 81$

$\Leftrightarrow -9 \leqslant x \leqslant 9$

Donc $\mathcal{S} = [-9\,;9]$.

c)

x	$-\infty$		$-2{,}8$		$1{,}5$		$+\infty$
$x-1{,}5$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+2{,}8$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x-1{,}5)(x+2{,}8)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\mathcal{S} =]-\infty\,;-2{,}8[\cup]1{,}5\,;+\infty[$.

d) Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$.

Donc $x^2 + 20 > 0$.

Donc $\mathcal{S} = \varnothing$.

62. a) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times \dfrac{4}{3} = 0$

$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2\times 3} = \dfrac{2}{3}$

$a = 3 > 0$, donc on a :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x^2 - 4x + \frac{4}{3}$		$+$	0	$+$	

L'inéquation à résoudre est $3x^2 - 4x + \dfrac{4}{3} \leqslant 0$.

Donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

b) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (50{,}5)^2 - 4 \times 5 \times 5 = 2450{,}25 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-50{,}5)-\sqrt{2450{,}25}}{2\times 5} = 0{,}1$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-50{,}5)+\sqrt{2450{,}25}}{2\times 5} = 10$

$a = 5 > 0$, donc on a :

x	$-\infty$		$0{,}1$		10		$+\infty$
$5x^2 - 50{,}5x + 5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'inéquation à résoudre est $5x^2 - 50{,}5x + 5 < 0$.

Donc $\mathcal{S} =]0{,}1\,;10[$.

c) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$

$a = 1 > 0$, donc on a :

x	$-\infty$		$+\infty$
$x^2 + x + 1$		$+$	

L'inéquation à résoudre est $x^2 + x + 1 > 0$.

Donc $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

d) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times (-6) = -39 < 0$

$a = -2 < 0$, donc on a :

x	$-\infty$		$+\infty$
$-2x^2 + 3x - 6$		$-$	

L'inéquation à résoudre est $-2x^2 + 3x - 6 < 0$.

Donc $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

63. a) $-6x^2 + 15x - 4 \leqslant 2 \Leftrightarrow -6x^2 + 15x - 6 \leqslant 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 15^2 - 4 \times (-6) \times (-6) = 81 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-15-\sqrt{81}}{2\times(-6)} = 2$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-15+\sqrt{81}}{2\times(-6)} = \dfrac{1}{2}$

$a = -6 < 0$, donc on a :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$-6x^2 + 15x - 6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'inéquation à résoudre est $-6x^2 + 15x - 6 \leqslant 0$.

Donc $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[2\,;+\infty\right[$.

b) $-7x^2 + 4x - 9 > -8 \Leftrightarrow -7x^2 + 4x - 1 > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4^2 - 4 \times (-7) \times (-1) = -12 < 0$

$a = -7 < 0$, donc on a :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$-7x^2+4x-1$	$-$

L'inéquation à résoudre est :
$-7x^2+4x-1>0$
Donc $\mathcal{S}=\varnothing$.

Calculs et automatismes

64. a) $2x^2-3x=x\times(2x-3)$
b) $x^2-5=\left(x-\sqrt{5}\right)\times\left(x+\sqrt{5}\right)$

65. a) $4(x-2)^2+3=4(x^2-4x+4)+3$
$=4x^2-16x+16+3$
$=4x^2-16x+19$
b) $2(x-1)(x-3)=2(x^2-3x-x+3)$
$=2(x^2-4x+3)$
$=2x^2-8x+6$

66. a) $x^2-8x+16=(x-4)^2$
b) $x^2-5x=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4}$
c) $x^2+6x-3=(x+3)^2-12$

67. 1. $f(1)=1^2+2\times1-3=0$
2. $f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)-3=-4$

Exercices d'entraînement p. 97-100

Fonction polynôme de degré 2

68. 1. Pour tout réel x :
$2(x+4)(x-2)=2(x^2-2x+4x-8)$
$=2(x^2+2x-8)$
$=2x^2+4x-16$
Donc $f(x)=2(x+4)(x-2)$.
2. Pour tout réel x :
$2(x+1)^2-18=2(x^2+2x+1)-18$
$=2x^2+4x+2-18$
$=2x^2+4x-16$
Donc $f(x)=2(x+1)^2-18$.
3. a) Pour tout réel x :
$f(x)=2(x+1)^2-18$
Donc $\alpha=-1$; $\beta=-18$ et $a=2>0$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f		$\searrow$	-18	$\nearrow$	

b) $f(x)=0 \Leftrightarrow 2(x+4)(x-2)=0$
$\Leftrightarrow 2=0$ ou $x+4=0$ ou $x-2=0$
$\Leftrightarrow x=-4$ ou $x=2$
Donc $\mathcal{S}=\{-4\ ;2\}$.
c) $f(x)=-16 \Leftrightarrow 2x^2+4x-16=-16$
$\Leftrightarrow 2x^2+4x=0$
$\Leftrightarrow 2x(x+2)=0$
$\Leftrightarrow 2x=0$ ou $x+2=0$
$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-2$
Donc $\mathcal{S}=\{-2\ ;0\}$
d) Les racines de f sont -4 et 2 et $a=2>0$.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\mathcal{S}=]-\infty\ ;-4]\cup[2\ ;+\infty[$.

69. 1. Pour tout réel x :
$f(x)=(x+2)^2-9$
$=x^2+4x+4-9$
$=x^2+4x-5$
2. Pour tout réel x :
$f(x)=(x+2)^2-3^2$
$=(x+2-3)(x+2+3)$
$=(x-1)(x+5)$
3. a) $f(x)=-9 \Leftrightarrow (x+2)^2-9=-9$
$\Leftrightarrow (x+2)^2=0$
$\Leftrightarrow x+2=0$
$\Leftrightarrow x=-2$
Donc $\mathcal{S}=\{-2\}$.
b) $f(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+5)=0$
$\Leftrightarrow x-1=0$ ou $x+5=0$
$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-5$
Donc $\mathcal{S}=\{-5\ ;1\}$.
c) $f(x)=-5 \Leftrightarrow x^2+4x-5=-5$
$\Leftrightarrow x^2+4x=0$
$\Leftrightarrow x(x+4)=0$
$\Leftrightarrow x=0$ ou $x+4=0$
$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-4$
Donc $\mathcal{S}=\{-4\ ;0\}$.

70. Pour tout réel x, $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Le sommet de la parabole a pour coordonnées (1 ; 2).

Donc $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.

Donc $f(x) = a(x - 1)^2 + 2$.

Or $f(0) = 4$.

Donc $a \times (0 - 1)^2 + 2 = 4$.

Soit $a \times 1 + 2 = 4$.

Donc $a = 2$.

Donc pour tout réel x, $f(x) = 2(x - 1)^2 + 2$.

71. Pour tout réel x, $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Or f admet pour extremum 2 atteint en -1.

Donc $\alpha = -1$ et $\beta = 2$.

Donc $f(x) = a(x - (-1))^2 + 2$.

Soit $f(x) = a(x + 1)^2 + 2$.

Or $f(1) = 0$.

Donc $a \times (1 + 1)^2 + 2 = 0$.

Soit $a \times 4 + 2 = 0$.

Donc $a = -\frac{1}{2}$.

Donc pour tout réel x, $g(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 2$.

72. Pour tout réel x, $g(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Le sommet de la parabole est A(1 ; 3).

Donc $\alpha = 1$ et $\beta = 3$.

Donc $g(x) = a(x - 1)^2 + 3$.

Or la courbe de g passe par le point B(0 ; 5).

Donc $g(0) = 5$.

Donc $a \times (0 - 1)^2 + 3 = 5$.

Soit $a \times 1 + 3 = 5$.

Donc $a = 2$.

Donc pour tout réel x, $g(x) = 2(x - 1)^2 + 3$.

73. • La courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses en deux points A(–2 ; 0) et B(1 ; 0).

Donc f admet deux racines qui sont -2 et 1.

Donc pour tout réel x, $f(x) = a(x - (-2))(x - 1)$.

$f(x) = a(x + 2)(x - 1)$

Or $f(0) = 1$.

Donc $a \times (0 + 2) \times (0 - 1) = 1$.

Donc $a = -\frac{1}{2}$.

Donc $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)(x - 1)$.

• La courbe représentative de g ne coupe pas l'axe des abscisses.

Donc g n'admet aucune racine.

Donc on ne peut pas écrire $g(x)$ comme un produit de polynômes de degré 1.

• La courbe représentative de h coupe l'axe des abscisses en un seul point : C(–4 ; 0).

Donc h admet une unique racine qui est -4.

Donc pour tout réel x, $h(x) = a(x - (-4))^2 = a(x + 4)^2$.

Or $h(0) = 4$.

Donc $a \times (0 + 4)^2 = 4$.

Donc $a = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

Donc $h(x) = \frac{1}{4}(x + 4)^2$.

74. f admet deux racines qui sont -3 et 2.

Donc pour tout réel x :

$f(x) = a(x - (-3))(x - 2) = a(x + 3)(x - 2)$

Or $f(1) = 5$.

Donc $a \times (1 + 3) \times (1 - 2) = 5$.

Donc $a = \frac{5}{4 \times (-1)} = -\frac{5}{4}$.

Donc $f(x) = -\frac{5}{4}(x + 3)(x - 2)$.

75. 1. A(0 ; 1) appartient à la courbe représentative de f.

Donc $a \times 0^2 + b \times 0 + c = 1$.

Donc $c = 1$.

2. B(1 ; –1)et C(4 ; 2) sont deux points de la courbe représentative de f.

Or $f(x) = ax^2 + bx + 1$

$$\begin{cases} a \times 1^2 + b \times 1 + 1 = -1 \\ a \times 4^2 + b \times 4 + 1 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 1 = -1 \\ 16a + 4b + 1 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 - a \\ 16a + 4(-2 - a) + 1 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 - a \\ 16a - 8 - 4a + 1 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 - a \\ 12a = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 - a \\ a = \dfrac{9}{12} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 - \dfrac{3}{4} \\ a = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{11}{4} \\ a = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

3. Donc, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{11}{4}x + 1$.

76. 1. $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{(-0,4)}{2 \times 0,008} = 25$

$\beta = f(\alpha) = 0,008 \times 25^2 - 0,4 \times 25 + 75 = 70$

$a = 0,008 > 0$

x	0		25		52
f	75	↘	70	↗	75,832

2. a) Son poids maximal sur l'année est 75,832 kg. Il est atteint 52 semaines après le 1er janvier 2018.

2. b) Son poids minimal sur l'année est 70 kg. Il est atteint 25 semaines après le 1er janvier 2018.

Équations et inéquations

77. Soit x le plus petit entier recherché.

$x^2 + (x+1)^2 = 4\,141 \Leftrightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = 4\,141$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4\,140 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times (-4\,140) = 33\,124 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 + \sqrt{33\,124}}{2 \times 2} = -46$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 + \sqrt{33\,124}}{2 \times 2} = 45$

Les deux entiers recherchés sont donc -46 et -45 ou 45 et 46.

78. a) $\dfrac{5x^2 - 12,5x - 7,5}{3 - x} = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 12,5x - 7,5 = 0$ et $x - 3 \neq 0$.

Résolvons $5x^2 - 12,5x - 7,5 = 0$.

$\Delta = (-12,5)^2 - 4 \times 5 \times (-7,5) = 306,25 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-12,5) - \sqrt{306,25}}{2 \times 5} = -0,5$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-12,5) + \sqrt{306,25}}{2 \times 5} = 3$

$\dfrac{5x^2 - 12,5x - 7,5}{3 - x} = 0 \Leftrightarrow x = -0,5$ ou $x = 3$ et $x \neq 3$.

Donc $\mathcal{S} = \{-0,5\}$.

b) $\dfrac{x + 20}{10} = \dfrac{10}{x} \Leftrightarrow (x + 20)x = 10 \times 10$ et $x \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 20x - 100 = 0$ et $x \neq 0$

Résolvons $x^2 + 20x - 100 = 0$.

$\Delta = 20^2 - 4 \times 1 \times (-100) = 800 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-20 - \sqrt{800}}{2 \times 1} = -10 - 10\sqrt{2}$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-20 + \sqrt{800}}{2 \times 1} = -10 + 10\sqrt{2}$

Donc $\mathcal{S} = \left\{-10 - 10\sqrt{2}\ ; -10 + 10\sqrt{2}\right\}$.

79. 1. $5^2 + 2 \times 5 - 8 = 27$

Donc si on choisit le nombre 5, on obtient le nombre 27.

2. $x^2 + 2 \times x - 8 = 91 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 99 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-99) = 400 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 - \sqrt{400}}{2 \times 1} = -11$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 + \sqrt{400}}{2 \times 1} = 9$

Donc on obtient 91 si on choisit comme nombre de départ -11 ou 9.

80. 1.

Ligne	Valeur de x
L1	2
L2	1
L3	1
L4	3

La valeur de x à la fin du programme est 3.

2. $2(x-1)^2 + 1 = 1{,}5 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 = 0{,}5$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0{,}25$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0{,}5$ ou $x - 1 = -0{,}5$

$\Leftrightarrow x = 1{,}5$ ou $x = 0{,}5$

Il faut donc remplacer la première ligne par $x = 1{,}5$ ou $x = 0{,}5$.

81. 1. $\begin{cases} y = 2x^2 - x + 5 \\ y = -x + 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x + 5 = -x + 9 \\ y = -x + 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 4 \\ y = -x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ y = -x + 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} + 9 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} + 9 \end{cases}$

Donc les points d'intersection de la parabole et de la droite d'équation $y = -x + 9$ ont pour coordonnées $(-\sqrt{2}\,;\sqrt{2} + 9)$ et $(\sqrt{2}\,;-\sqrt{2} + 9)$.

2. Si $x = 2$, alors $y = 2 \times 2^2 - 2 + 5 = 11$.

Donc le point de la parabole d'abscisse 2 a pour ordonnée 11.

3. $y = 15 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 5 = 15$

$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 10 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-10) = 81 > 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{81}}{2 \times 2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{81}}{2 \times 2} = \frac{5}{2}$$

Donc il existe deux points de la parabole d'ordonnée 15, un d'abscisse −2 et l'autre d'abscisse $\frac{5}{2}$.

82. 1. Résolvons $-x^2 + 3x - 5 = 0$.

$\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = -11 < 0$

$a = -1 < 0$. Donc on a :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-x^2 + 3x - 5$		$-$		$-$	
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	‖	$-$	

2. Résolvons $3x^2 + 9x + 6 = 0$.

$\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times 6 = 9 > 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 - \sqrt{9}}{2 \times 3} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 + \sqrt{9}}{2 \times 3} = -1$$

$a = 3 > 0$. Donc on a :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$3x^2 + 9x + 6$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(x+3)^2$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$g(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

83. 1. Résolvons $3x^2 - 4x + 7 = 0$.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 7 = -68 < 0$

$a = 3 > 0$. Donc on a :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3x^2 - 4x + 7$		$+$		$+$	
$2x + 1$		$-$	0	$+$	
$\frac{3x^2 - 4x + 7}{2x + 1}$		$-$	‖	$+$	

L'inéquation $\frac{3x^2 - 4x + 7}{2x + 1} \geqslant 0$ a pour solution

$\mathcal{S} = \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

2. Résolvons $-25x^2 + 10x - 1 = 0$.

$\Delta = 10^2 - 4 \times (-25) \times (-1) = 0$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2 \times (-25)} = 0{,}2$$

$a = -25 < 0$. Donc on a :

x	$-\infty$		$0{,}2$		5		$+\infty$
$5 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
$-25x^2 + 10x - 1$		$-$	0	$-$		$-$	
$\frac{5 - x}{-25x^2 + 10x - 1}$		$-$	‖	$-$	0	$+$	

L'inéquation $\frac{5 - x}{-25x^2 + 10x - 1} < 0$ a pour solution

$\mathcal{S} =]-\infty\,; 0{,}2[\cup]0{,}2\,; 5[$.

84. 1. La surface du parallélépipède est :

$S(x) = 2x^2 + 4 \times x \times 3$

$S(x) = 2x^2 + 12x$

2. $S(1) = 2 \times 1^2 + 12 \times 1 = 14$

Donc si $x = 1$ cm, alors cette surface vaut 14 cm^2.

3. $S(x) = 100 \Leftrightarrow 2x^2 + 12x = 100$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 12x - 100 = 0$

$\Delta = 12^2 - 4\times 2 \times (-100) = 944 > 0$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12-\sqrt{944}}{2\times 2} = -3-\sqrt{59}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12+\sqrt{944}}{2\times 2} = -3+\sqrt{59}$$

Or $x \geqslant 0$.

Donc la surface vaut 100 cm^2 lorsque $x = -3 + \sqrt{59}$.

85. 1. Soit $f(x)$ la surface en m^2 de carrelage nécessaire pour carreler la pièce.

$f(x) = x^2 + 3 \times x \times 2 = x^2 + 6x$

Or $f(2) = 2^2 + 6 \times 2 = 16$.

Donc si $x = 2$, il lui faudra 16 m^2 de carrelage.

2. $f(x) = 18{,}04 \Leftrightarrow x^2 + 6x = 18{,}04$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x - 18{,}04 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4\times 1 \times (-18{,}04) = 108{,}16 > 0$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{108{,}16}}{2\times 1} = -8{,}2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{108{,}16}}{2\times 1} = 2{,}2$$

Or $x \geqslant 0$

Si Jason a besoin de précisément 18,04 m^2 de carrelage, alors sa salle de bain a pour côté 2,2 mètres.

86. Soit x le nombre de personnes.

$x \times (x-1) = 210 \Leftrightarrow x^2 - x - 210 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-210) = 841 > 0$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{841}}{2\times 1} = -14$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{841}}{2\times 1} = 15$$

Or $x \geqslant 0$.

Donc il y a 15 personnes.

87. 1. a) On pose $X = x^2$.

L'équation (E) devient $X^2 - 6X + 8 = 0$.

b) $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 4 > 0$

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6)-\sqrt{4}}{2\times 1} = 2$$

$$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6)+\sqrt{4}}{2\times 1} = 4$$

c) Or $X = x^2$.

$x^4 - 6x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2$ ou $x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

ou $x = -\sqrt{2}$ ou $x = 2$ ou $x = -2$

Donc $\mathcal{S} = \{-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\,;-2\,;2\}$.

2. a) On pose $X = x^2$.

L'équation devient $X^2 - 2X - 8 = 0$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 36 > 0$

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{36}}{2\times 1} = -2$$

$$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{36}}{2\times 1} = 4$$

Or $X = x^2$.

$x^4 - 6x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -2$ ou $x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$

Donc $\mathcal{S} = \{-2\,;2\}$.

b) On pose $X = x^2$.

L'équation devient $X^2 + X + 1 = 0$.

$\Delta = (-1)^2 - 4\times 1 \times 1 = -3 < 0$

Donc l'équation $X^2 + X + 1 = 0$ n'a pas de solution.

Donc l'équation $x^4 + x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution.

88. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -(n+1)^3 + 2(n+1)^2 - 3(n+1) \\ &= -(n+1)^2(n+1) + 2(n^2+2n+1) - 3n - 3 \\ &= -(n^2+2n+1)(n+1) + 2n^2 + 4n + 2 - 3n - 3 \\ &= -n^3 - n^2 - 2n^2 - 2n - n - 1 + 2n^2 + n - 1 \\ &= -n^3 - n^2 - 2\mathrm{n} - 2 \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} - u_n = -n^3 - n^2 - 2n - 2 - (-n^3 + 2n^2 - 3n)$

$= -n^3 - n^2 - 2n - 2 + n^3 - 2n^2 + 3n$

$= -3n^2 + n - 2$

2. Résolvons $-3x^2 + x - 2 = 0$.

$\Delta = 1^2 - 4 \times (-3) \times (-2) = -23 < 0$

$a = -3 < 0$

Donc pour tout réel x, $-3x^2 + x - 2 < 0$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$.

3. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

89. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} = (n+1)^3 - 3(n+1)^2 - 16(n+1) + 2$
$= (n+1)^2(n+1) - 3(n^2+2n+1) - 16n - 16 + 2$
$= (n^2+2n+1)(n+1) - 3n^2 - 6n - 3 - 16n - 14$
$= n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + n + 1 - 3n^2 - 22n - 17$
$= n^3 - 19n - 16$

Donc $u_{n+1} - u_n = n^3 - 19n - 16 - (n^3 - 3n^2 - 16n + 2)$
$= n^3 - 19n - 16 - n^3 + 3n^2 + 16n - 2$
$= 3n^2 - 3n - 18$

2. Résolvons $3x^2 - 3x - 18 = 0$.

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 3 \times (-18) = 225 > 0$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{225}}{2\times 3} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{225}}{2\times 3} = 3$$

$a = 3 > 0$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$3x^2 - 3x - 18$		+	0	−	0	+	

Donc, si $0 \leqslant n \leqslant 2$, alors $u_{n+1} - u_n < 0$.

Et si $n \geqslant 3$, alors $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

3. Donc la suite (u_n) est croissante à partir du rang 3.

90. 1. $(2 + 30 + 2) \times (2 + 45 + 2) = 1\,666$

Donc si le cadre a une largueur de 2 cm, alors l'aire totale de la gravure avec son cadre est 1 666 cm^2.

2. a) $f(x) = (30 + 2x)(45 + 2x)$

$f(x) = 30 \times 45 + 60x + 90x + 4x^2$

$f(x) = 4x^2 + 150x + 1\,350$

b) $f(x) = 1\,924 \Leftrightarrow 4x^2 + 150x + 1\,350 = 1\,924$
$\Leftrightarrow 4x^2 + 150x - 574 = 0$

$\Delta = 150^2 - 4 \times 4 \times (-574) = 31\,684 > 0$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-150-\sqrt{31684}}{2\times 4} = -41$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-150-\sqrt{31684}}{2\times 4} = 3{,}5$$

Donc l'aire de la gravure et du cadre est égale à 1 924 cm^2 lorsque $x = 3{,}5$ cm.

c) L'aire du cadre est $f(x) - 30 \times 45$.

$f(x) - 1\,350 \leqslant 850 \Leftrightarrow 4x^2 + 150x + 1\,350 - 1\,350 \leqslant 850$
$\Leftrightarrow 4x^2 + 150x - 850 \leqslant 0$

$\Delta = 150^2 - 4 \times 4 \times (-850) = 36\,100 > 0$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-150-\sqrt{36\,100}}{2\times 4} = -42{,}5$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-150+\sqrt{36\,100}}{2\times 4} = 5$$

x	$-\infty$		$-42{,}5$		5		$+\infty$
$4x^2 + 150x - 850$		+	0	−	0	+	

Pour que l'aire du cadre ne dépasse pas 850 cm^2, il faut que $0 \leqslant x \leqslant 5$.

91. Soient x et y les deux nombres recherchés.

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ x \times y = 375 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 40 - x \\ x \times (40 - x) = 375 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 40 - x \\ -x^2 + 40x - 375 = 0 \end{cases}$$

Résolvons $-x^2 + 40x - 375 = 0$.

$\Delta = 40^2 - 4 \times (-1) \times (-375) = 100 > 0$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-40-\sqrt{100}}{2\times(-1)} = 25$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-40+\sqrt{100}}{2\times(-1)} = 15$$

Si $x = 15$, alors $y = 40 - 15 = 25$.

Si $x = 25$, alors $y = 40 - 25 = 15$.

Les deux nombres recherchés sont donc 15 et 25.

92. Soient x la longueur du rectangle et y la largeur du rectangle.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 25 \\ x \times y = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 12{,}5 - x \\ x \times (12{,}5 - x) = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 12{,}5 - x \\ -x^2 + 12{,}5x - 25 = 0 \end{cases}$$

Résolvons $-x^2 + 12{,}5x - 25 = 0$.

$\Delta = 12{,}5^2 - 4 \times (-1) \times (-25) = 56{,}25 > 0$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12{,}5-\sqrt{56{,}25}}{2\times(-1)} = 10$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12{,}5+\sqrt{56{,}25}}{2\times(-1)} = 2{,}5$$

Si $x = 10$, alors $y = 12{,}5 - 10 = 2{,}5$.

Si $x = 2{,}5$, alors $y = 12{,}5 - 2{,}5 = 10$.

Donc la largeur du rectangle est 2,5 et sa longueur est 10.

93. 1. x peut prendre toutes les valeurs positives. $x \in [0\,;+\infty[$

2. $A(x) = x^2 + \frac{1}{2} \times x \times 2 = x^2 + x$

3. Si $x = 5$, alors $A(5) = 5^2 + 5 = 30$.

4. $A(x) = 24{,}75 \Leftrightarrow x^2 + x = 24{,}75$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 24{,}75 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-24{,}75) = 100 > 0$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{100}}{2\times 1} = -\frac{11}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{100}}{2\times 1} = \frac{9}{2}$$

Or $x \geqslant 0$.

Donc $A(x) = 24{,}75$ lorsque $x = \frac{9}{2}$.

94. 1. a) $x \in]0\,;2[$

Soit $f(x)$ l'aire de la croix.

$f(x) = x \times 2 + x \times 2 - x^2 = -x^2 + 4x$

$f(x) = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \Leftrightarrow -x^2 + 4x = 6$

$\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 6 = 0$

$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-6) = -8 < 0$

Donc l'aire de la croix ne peut pas être égale à la moitié de l'aire du drapeau.

b) $f(x) = \frac{1}{4} \times 4 \times 3 \Leftrightarrow -x^2 + 4x = 3$

$\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0$

$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 4 > 0$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{4}}{2\times(-1)} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{4}}{2\times(-1)} = 1$$

Donc l'aire de la croix est égale au quart de l'aire du drapeau si $x = 1$.

2. $f(x) = 2 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 2 = 0$

$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 8 > 0$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{8}}{2\times(-1)} = 2+\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{8}}{2\times(-1)} = 2-\sqrt{2}$$

Or $x \in]0\,;2[$.

Donc l'aire de la croix est égale à 2 m² si $x = 2 - \sqrt{2}$.

Problèmes

95. 1. $B(x) = 300x - f(x)$

$B(x) = 300x - (x^2 + 230x + 325)$

$B(x) = -x^2 + 70x - 325$

2. $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{70}{2\times(-1)} = 35$

$\beta = B(\alpha) = -35^2 + 70 \times 35 - 325 = 900$

$a = -1 < 0$, donc on a :

x	0		35		50
B	-325	↗	900	↘	675

3. Le bénéfice maximal est 900 €, et il est atteint pour 35 balançoires.

4. $B(x) > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 70x - 325 > 0$

$\Delta = 70^2 - 4 \times (-1) \times (-325) = 3\,600 > 0$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-70-\sqrt{3\,600}}{2\times(-1)} = 65$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-70+\sqrt{3\,600}}{2\times(-1)} = 5$$

x	0		5		50
$B(x)$		$-$	0	$+$	

Pour être rentable, l'entreprise doit produire et vendre entre 5 et 50 balançoires.

96. 1. Si $x = 5$, alors :

$y = -0{,}03 \times 5^2 + 0{,}3 \times 5 + 0{,}75 = 1{,}5$

Donc $y > 1$.

Donc la balle passe au-dessus du filet.

2. $y = 0 \Leftrightarrow -0{,}03x^2 + 0{,}3x + 0{,}75 = 0$

$\Delta = 0{,}3^2 - 4 \times (-0{,}03) \times 0{,}75 = 0{,}18 > 0$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0{,}3-\sqrt{0{,}18}}{2\times(-0{,}03)} \approx 12{,}07$$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-0{,}3+\sqrt{0{,}18}}{2\times(-0{,}03)} \approx -2{,}07$

Donc la balle retombe à environ 12,07 m du joueur.

3. $y \geqslant 1{,}02 \Leftrightarrow -0{,}03x^2 + 0{,}3x + 0{,}75 \geqslant 1{,}02$

$\Leftrightarrow -0{,}03x^2 + 0{,}3x - 0{,}27 \geqslant 0$

$\Delta = 0{,}3^2 - 4\times(-0{,}03)\times(-0{,}27) = 0{,}0576 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-0{,}3-\sqrt{0{,}0576}}{2\times(-0{,}03)} = 9$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-0{,}3+\sqrt{0{,}0576}}{2\times(-0{,}03)} = 1$

$a = -0{,}03 < 0$, donc :

x	0		1		9		$+\infty$
$-0{,}03x^2 + 0{,}3x - 0{,}27$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\mathcal{S} = [1\ ;\ 9]$

Donc la balle a une hauteur supérieure ou égale à 1,02 m entre 1 m et 9 m du joueur.

97. 1. Si $x = 4$, alors :

$y = -0{,}16\times 4^2 + 0{,}48\times 4 + 1{,}08 = 0{,}44$

Donc $y > 0{,}4$.

Donc la boulette passera au-dessus du premier rebord de la corbeille.

2. $y = 0 \Leftrightarrow -0{,}16x^2 + 0{,}48x + 1{,}08 = 0$

$\Delta = 0{,}48^2 - 4\times(-0{,}16)\times 1{,}08 = 0{,}9216 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-0{,}48-\sqrt{0{,}9216}}{2\times(-0{,}16)} = 4{,}5$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-0{,}48+\sqrt{0{,}9216}}{2\times(-0{,}16)} = -1{,}5$

Donc s'il n'y avait pas eu la corbeille, la boulette serait retombée à 4,5 m de Julie.

3. D'après la question **1.**, la boulette passera au-dessus du premier rebord de la corbeille.

Le diamètre de la corbeille est 30 cm. Donc le deuxième rebord est à une distance de 4,3 mètres de Julie.

Si $x = 4{,}3$, alors :

$y = -0{,}16\times 4{,}3^2 + 0{,}48\times 4{,}3 + 1{,}08 = 0{,}1856$

Donc $y < 0{,}4$.

Donc la boulette ne passera pas le deuxième rebord.

Elle retombera donc dans la corbeille.

98. 1. Notons $f(x)$ l'aire du carré EFGH.

$f(x) = EH^2$

Or le triangle AEH est rectangle en A.

D'après le théorème de Pythagore :

$EH^2 = AE^2 + AH^2$

$EH^2 = x^2 + (5-x)^2$

$EH^2 = 2x^2 - 10x + 25$

Donc $f(x) = 2x^2 - 10x + 25$.

2. $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-10}{2\times 2} = \dfrac{5}{2}$

$\beta = f(\alpha) = 2\times\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 - 10\times\left(\dfrac{5}{2}\right) + 25 = \dfrac{25}{2}$

$a = 2 > 0$, donc on a :

x	0		$\frac{5}{2}$		5
f	25	$\searrow$	$\frac{25}{2}$	$\nearrow$	25

Cette aire est minimale lorsque $x = \dfrac{5}{2}$.

L'aire minimale vaut $\dfrac{25}{2}$ cm^2.

3. $f(x) = 14{,}12 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 25 = 14{,}12$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 10{,}88 = 0$

$\Delta = (-10)^2 - 4\times 2\times 10{,}88 = 12{,}96 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-10)-\sqrt{12{,}96}}{2\times 2} = 1{,}6$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-10)+\sqrt{12{,}96}}{2\times 2} = 3{,}4$

Donc cette aire vaut 14,12 cm^2 si $x = 1{,}6$ ou $x = 3{,}4$.

4. $f(x) \leqslant 13 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 25 \leqslant 13$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 12 \leqslant 0$

$\Delta = (-10)^2 - 4\times 2\times 12 = 4 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-10)-\sqrt{4}}{2\times 2} = 2$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-10)+\sqrt{4}}{2\times 2} = 3$

$a = 2 > 0$, donc :

x	0		2		3		5
$2x^2 - 10x + 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\mathcal{S} = [2\ ;\ 3]$.

Cette aire est inférieure ou égale à 13 cm^2 si $x \in [2\ ;\ 3]$.

99. 1. L'ensemble de définition de f est [0 ; 5].

2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \times (5 - x)(10 - x)$

$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \times (50 - 5x - 10x + x^2)$

$= \frac{1}{2}x^2 + 25 - \frac{5}{2}x - \frac{10}{2}x + \frac{1}{2}x^2$

$= x^2 - \frac{15}{2}x + 25$

3. $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{15}{2}}{2 \times 1} = \frac{15}{4}$

$\beta = f(\alpha) = \left(\frac{15}{4}\right)^2 - \frac{15}{2} \times \frac{15}{4} + 25 = \frac{175}{16}$

$a = 1 > 0$, donc on a :

x	0	$\frac{15}{4}$	5
f	25 ↘	$\frac{175}{16}$	↗ $\frac{25}{2}$

4. L'aire blanche est minimale lorsque $x = \frac{15}{4}$.

L'aire minimale vaut $\frac{175}{16}$ cm^2.

5. a) $f(x) = \frac{1}{2} \times 5 \times 10 \Leftrightarrow x^2 - \frac{15}{2}x + 25 = 25$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{15}{2}x = 0$

$\Leftrightarrow x\left(x - \frac{15}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x - \frac{15}{2} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{15}{2}$

Donc l'aire blanche vaut la moitié de l'aire du rectangle ABCD si $x = 0$ ou $x = \frac{15}{2}$.

b) $f(x) = \frac{1}{4} \times 5 \times 10 \Leftrightarrow x^2 - \frac{15}{2}x + 25 = \frac{25}{2}$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{25}{2} = 0$

$\Delta = \left(-\frac{15}{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times \frac{25}{2} = \frac{25}{4} > 0$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\left(-\frac{15}{2}\right) - \sqrt{\frac{25}{4}}}{2 \times 1} = \frac{5}{2}$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\left(-\frac{15}{2}\right) + \sqrt{\frac{25}{4}}}{2 \times 1} = 5$

Donc l'aire blanche vaut le quart de l'aire du rectangle ABCD si $x = \frac{5}{2}$ ou $x = 5$.

100. 1. Si $x = 0$, alors $y = -\frac{1}{4} \times 0^2 + 0 + 0{,}5 = 0{,}5$.

Donc, avant de sauter, la poche du kangourou femelle se trouve à 0,5 m du sol.

2. $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)} = 2$

$\beta = -\frac{1}{4} \times 2^2 + 2 + 0{,}5 = 1{,}5$

$a = -\frac{1}{4} < 0$, donc on a :

x	0	2	$+\infty$
$x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + x + 0{,}5$	$0{,}5$ ↗	$1{,}5$	↘

L'altitude maximale atteinte par le bébé kangourou est 1,5 m.

3. $y = 0{,}5 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + x + 0{,}5 = 0{,}5$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + x = 0$

$\Leftrightarrow x \times \left(-\frac{1}{4}x + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $-\frac{1}{4}x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$

Donc la longueur du saut est 4 m.

101. 1. $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{0{,}3}{2 \times (-0{,}05)} = 3$

$\beta = -0{,}05 \times 3^2 + 0{,}3 \times 3 = 0{,}45$

$a = -0{,}05 < 0$, donc on a :

x	0 3 $+\infty$
$x \mapsto -0{,}05x^2 + 0{,}3x$	0 ↗ $0{,}45$ ↘

L'altitude maximale atteinte par le pied gauche est de 0,45 m.

2. $y = 0 \Leftrightarrow -0{,}05x^2 + 0{,}3x = 0$

$\Leftrightarrow x \times (-0{,}05x + 0{,}3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $-0{,}05x + 0{,}3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $-0{,}05x = -0{,}3$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 6$

Donc le pied gauche est retombé à 6 m de la planche d'appel.

102. 1. $h(0) = -4{,}9 \times 0^2 + 3\,500 = 3\,500$

Donc au moment du saut, l'avion était à 3500 m d'altitude

2. $h(t) = 1\,500 \Leftrightarrow -4{,}9t^2 + 3\,500 = 1\,500$

$\Leftrightarrow -4{,}9t^2 + 2\,000 = 0$

$\Leftrightarrow 4{,}9t^2 = 2\,000$

$\Leftrightarrow t^2 = \dfrac{2000}{4{,}9}$

$\Leftrightarrow t = \sqrt{\dfrac{2000}{4{,}9}}$ car $t \geqslant 0$.

Il doit donc déployer son parachute au bout d'environ 20,2 secondes.

103. 1. $f(x) = 20 \times x^2 + 100 \times (x + 2 + 2) \times 4 + 150$

$= 20x^2 + 400(x + 4) + 150$

$= 20x^2 + 400x + 1\,600 + 150$

$= 20x^2 + 400x + 1\,750$

2. Si $x = 5$, alors :

$f(5) = 20 \times 5^2 + 400 \times 5 + 1\,750 = 4\,250$

Il payera donc 4 250 €.

3. $f(x) = 8\,155 \Leftrightarrow 20x^2 + 400x + 1\,750 = 8\,155$

$\Leftrightarrow 20x^2 + 400x - 6\,405 = 0$

$\Delta = 400^2 - 4 \times 20 \times (-6\,405) = 672\,400 > 0$

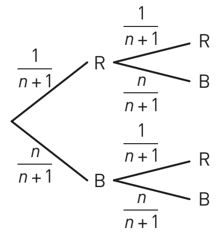
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-400 - \sqrt{672\,400}}{2 \times 20} = -30{,}5$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-400 + \sqrt{672\,400}}{2 \times 20} = 10{,}5$$

Or $x \geqslant 0$.

Donc s'il paye 8 155 €, sa piscine mesure 10,5 mètres de côté.

104. 1. On note B : « tirer une boule blanche » et R : « tirer une boule rouge ».



2. a) $P(\mathrm{M}) = P(\mathrm{R} \cap \mathrm{R}) + P(\mathrm{B} \cap \mathrm{B})$

$$P(\mathrm{M}) = \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} \times \frac{n}{n+1}$$

$$P(\mathrm{M}) = \frac{1+n^2}{(n+1)^2}$$

b) $P(\mathrm{N}) = P(\mathrm{R} \cap \mathrm{B}) + P(\mathrm{B} \cap \mathrm{R})$

$$P(\mathrm{N}) = \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{n+1}$$

$$P(\mathrm{N}) = \frac{2n}{(n+1)^2}$$

3. $P(\mathrm{M}) = 5{,}05P(\mathrm{N}) \Leftrightarrow \dfrac{1+n^2}{(n+1)^2} = 5{,}05 \times \dfrac{2n}{(n+1)^2}$

Or $n + 1 \neq 0$ car $n \geqslant 0$.

$P(M) = 5{,}05P(N) \Leftrightarrow 1 + n^2 = 5{,}05 \times 2n$

$\Leftrightarrow n^2 - 10{,}1n + 1 = 0$

$\Delta = 10{,}1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 98{,}01 > 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10{,}1) - \sqrt{98{,}01}}{2 \times 1} = 0{,}1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10{,}1) + \sqrt{98{,}01}}{2 \times 1} = 10$$

$n \in \mathbb{N}$ donc $n = 10$.

Travailler autrement

105. a) $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2 \times 2} = -1$

$\beta = f(\alpha) = 2(-1)^2 + 4(-1) + 8 = 6$

$a = 2 > 0$. Donc le minimum de f est 6.

b) $\Delta = (-2)^2 - 4 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{4} = 3 > 0$

Donc l'équation admet deux solutions.

c) $x^2 - 10x + 7 = (x - 5)^2 - 18$

d) $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{18}{2 \times (-1)} = 9$

Donc l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = 9$.

e) $\Delta = (-14)^2 - 4 \times 2 \times (-16) = 324 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-14)-\sqrt{324}}{2 \times 2} = -1$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-14)+\sqrt{324}}{2 \times 2} = 8$

La racine positive est 8.

f) Le produit des racines est $\dfrac{c}{a} = \dfrac{9}{3} = 3$

6	1	8
7	5	3
2	9	4

106. Voir les grilles proposées par chaque élève.

Exercices bilan p. 101

107. Équations et inéquations

1. Pour tout réel x, $f(x) = x^2 - 6x - 27$.

$f(x) = (x-3)^2 - 3^2 - 27$

Donc $f(x) = (x-3)^2 - 36$.

2. Pour tout réel x, $f(x) = (x-3)^2 - 6^2$.

$f(x) = (x-3-6)(x-3+6)$

$f(x) = (x-9)(x+3)$

3. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-9)(x+3) = 0$

$\Leftrightarrow x - 9 = 0$ ou $x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 9$ ou $x = -3$

Donc $\mathcal{S} = \{-3 ; 9\}$.

b) $f(x) = -27 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 = -27$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x = 0$

$\Leftrightarrow x \times (x-6) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 6$

Donc $\mathcal{S} = \{0 ; 6\}$.

c) $f(x) = -36 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 36 = -36$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$

Donc $\mathcal{S} = \{3\}$.

4. a) $g(1) = 2 \times 1^2 - \dfrac{3}{2} \times 1 - \dfrac{1}{2} = 0$

Donc 1 est une racine de g.

b) $\Delta = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 - 4 \times 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{25}{4} > 0$

Donc g admet deux racines.

Le produit des racines est égal à $\dfrac{c}{a}$.

Donc $x_1 \times x_2 = \dfrac{\left(-\dfrac{1}{2}\right)}{2}$.

Donc $1 \times x_2 = -\dfrac{1}{4}$.

Donc $x_2 = -\dfrac{1}{4}$.

L'autre racine de g vaut $-\dfrac{1}{4}$.

5. $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 < 2x^2 - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -x^2 - \dfrac{9}{2}x - \dfrac{53}{2} < 0$

$\Delta = \left(-\dfrac{9}{2}\right)^2 - 4 \times (-1) \times \left(-\dfrac{53}{2}\right) = -\dfrac{343}{4} < 0$

Or $a = -1 < 0$.

x	$-\infty$ $+\infty$
$-x^2 - \dfrac{9}{2}x - \dfrac{53}{2}$	$-$

Donc $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

108. Fonction polynôme de degré 2

1. $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-7}{2 \times (-2)} = -\dfrac{7}{4}$

$\beta = f(\alpha) = -2\left(-\dfrac{7}{4}\right)^2 - 7\left(-\dfrac{7}{4}\right) + 15 = \dfrac{169}{8}$

$a = -2 < 0$, donc :

x	$-\infty$	$\dfrac{-7}{4}$	$+\infty$
f	$\nearrow$	$\dfrac{169}{8}$	$\searrow$

2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 7x + 15 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \times (-2) \times 15 = 169 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-7)-\sqrt{169}}{2 \times (-2)} = \dfrac{3}{2}$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-7)+\sqrt{169}}{2\times(-2)} = -5$

Donc $\mathscr{S} = \left\{-5\,;\dfrac{3}{2}\right\}$.

3. • La forme factorisée est $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Donc $f(x) = -2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)(x+5)$.

• La forme canonique est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Donc $f(x) = -2\left(x + \dfrac{7}{4}\right)^2 + \dfrac{169}{8}$.

4. $a = -2 < 0$, donc

x	$-\infty$		-5		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

5. $f(x) < 0$

Donc $\mathscr{S} =]-\infty\,;-5[\, \cup \left]\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

6. $f(2) = -2\times 2^2 - 7\times 2 + 15 = -7$

Donc l'image de 2 est -7.

7. $f(x) = -70 \Leftrightarrow -2x^2 - 7x + 15 = -70$

$\Leftrightarrow -2x^2 - 7x + 85 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4\times(-2)\times 85 = 729 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-7)-\sqrt{729}}{2\times(-2)} = 5$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-7)+\sqrt{729}}{2\times(-2)} = -8{,}5$

Donc les antécédents de -70 par la fonction f sont $-8{,}5$ et 5.

8. Le maximum de f est $\dfrac{169}{8} = 21{,}125$.

Or $25 > 21{,}125$.

Donc 25 n'a pas d'antécédent par la fonction f.

109. Représentation graphique et parabole

1. $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2\times 2} = -\dfrac{1}{2}$

$\beta = 2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\dfrac{1}{2}\right) - 1{,}5 = -2$

Donc le sommet de la parabole a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}\,;-2\right)$.

2. L'axe de symétrie de la parabole est la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.

3. $\begin{cases} y = 2x^2 + 2x - 1{,}5 \\ x = 0 \end{cases}$

Le point d'intersection de la parabole avec l'axe des ordonnées est le point de coordonnées $(0\,;-1{,}5)$.

4. $\begin{cases} y = 2x^2 + 2x - 1{,}5 \\ y = 0 \end{cases}$

Résolvons $2x^2 + 2x - 1{,}5 = 0$.

$\Delta = 2^2 - 4\times 2\times(-1{,}5) = 16 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-\sqrt{16}}{2\times 2} = -\dfrac{3}{2}$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+\sqrt{16}}{2\times 2} = \dfrac{1}{2}$

Les points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses sont les points de coordonnées $\left(-\dfrac{3}{2}\,;0\right)$ et $\left(\dfrac{1}{2}\,;0\right)$.

5. $\begin{cases} y = 2x^2 + 2x - 1{,}5 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2x - 1{,}5 = 2x - 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 0{,}5 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0{,}25 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}5 \\ y = 2\times 0{,}5 - 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -0{,}5 \\ y = 2\times(-0{,}5) - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}5 \\ y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -0{,}5 \\ y = -2 \end{cases}$

La parabole et la droite d'équation $y = 2x - 1$ ont deux points d'intersections : M$(0{,}5\,;0)$ et N$(-0{,}5\,;-2)$.

110. Modéliser un problème géométrique

1. $x \in [0\,;5]$

2. $A(x) = \dfrac{1}{2}\times x\times(5-x)$

$A(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{2}x$

3. $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\frac{5}{2}}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{5}{2}$

$\beta = A(\alpha) = -\dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + \dfrac{5}{2} \times \dfrac{5}{2} = \dfrac{25}{8}$

$a = -\dfrac{1}{2} < 0$, donc :

x	0	$\frac{5}{2}$	5
A	0 ↗	$\frac{25}{8}$	↘ 0

4. $A(x) = 2{,}75 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{2}x - 2{,}75 = 0$

$\Delta = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) \times (-2{,}75) = 0{,}75 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-\frac{5}{2} - \sqrt{0{,}75}}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{5}{2} + \sqrt{0{,}75}$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-\frac{5}{2} + \sqrt{0{,}75}}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{5}{2} - \sqrt{0{,}75}$

On a $A(x) = 2{,}75$ lorsque $x = 2{,}5 - \sqrt{0{,}75}$ ou $x = 2{,}5 + \sqrt{0{,}75}$.

111. Utiliser la forme adaptée

1. Pour la fonction f : $a > 0$ et $\Delta < 0$.

Pour la fonction g : $a < 0$ et $\Delta > 0$.

2. • A(2 ; 1) est le sommet de la parabole correspondant à la fonction f.

Donc pour tout réel x :

$f(x) = a(x - 2)^2 + 1$

Or $f(1) = 3$.

Donc $a \times (1 - 2)^2 + 1 = 3$.

Donc $a = 2$.

$f(x) = 2(x - 2)^2 + 1$

• g admet deux racines distinctes -4 et -1.

Donc pour tout réel x :

$g(x) = a(x - (-4))(x - (-1))$

$g(x) = a(x + 4)(x + 1)$

Or $g(-2) = 1$.

Donc $a(-2 + 4)(-2 + 1) = 1$.

Donc $a = -\dfrac{1}{2}$.

$g(x) = -\dfrac{1}{2}(x + 4)(x + 1)$

112. Modéliser un problème économique

1. $f(20) = 0{,}23 \times 20^2 + 4 \times 20 + 300 = 472$

Donc le coût de fabrication de 20 boîtes est de 472 €.

2. $R(x) = 50x$

3. $B(x) = R(x) - f(x)$

$B(x) = 50x - (0{,}23x^2 + 4x + 300)$

$B(x) = -0{,}23x^2 + 46x - 300$

4. $B(20) = -0{,}23 \times 20^2 + 46 \times 20 - 300 = 528$

Le bénéfice réalisé est de 528 €.

5. $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{46}{2 \times (-0{,}23)} = 100$

$\beta = B(\alpha) = -0{,}23 \times 100^2 + 46 \times 100 - 300 = 2\,000$

$a = -0{,}23 < 0$, donc :

x	0	100	150
B	-300 ↗	$2\,000$	↘ $1\,425$

6. Le bénéfice maximal de l'artisan est 2 000 €. Il est obtenu pour 100 boîtes.

7. a) $B(x) = 1\,425 \Leftrightarrow -0{,}23x^2 + 46x - 300 = 1\,425$

$\Leftrightarrow -0{,}23x^2 + 46x - 1\,725 = 0$

$\Delta = 46^2 - 4 \times (-0{,}23) \times (-1\,725) = 529 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-46 - \sqrt{529}}{2 \times (-0{,}23)} = 150$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-46 + \sqrt{529}}{2 \times (-0{,}23)} = 50$

Pour obtenir un bénéfice de 1 425 €, il doit produire et vendre 50 ou 150 boîtes.

b) Le maximum de la fonction B est 2 000.

Or $3\,000 > 2\,000$.

Donc il ne peut pas réaliser un bénéfice de 3 000 €.

8. $B(x) > 0 \Leftrightarrow -0{,}23x^2 + 46x - 300 > 0$

$\Delta = 46^2 - 4 \times (-0{,}23) \times (-300) = 1\,840 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-46 - \sqrt{1\,840}}{2 \times (-0{,}23)} \approx 193{,}25$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-46+\sqrt{1\,840}}{2\times(-0{,}23)} \approx 6{,}75$

$a = -0{,}23 < 0$

x	0		x_2		150
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Pour être rentable, il doit fabriquer et vendre au moins 7 boîtes.

Exercices d'approfondissement p. 102-103

113. Résistances en parallèle ou en série

La résistance équivalente du circuit 1 est égale à $R_{eq1} = 1 + r$.

La résistance équivalente du circuit 2 est R_{eq2} et on a $\dfrac{1}{R_{eq2}} = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{r} = \dfrac{r+1}{r}$. Donc $R_{eq2} = \dfrac{r}{r+1}$.

$R_{eq1} = 4{,}5R_{eq2} \Leftrightarrow 1 + r = 4{,}5 \times \dfrac{r}{r+1}$

$\Leftrightarrow (1 + r)(r + 1) = 4{,}5r$

$\Leftrightarrow r^2 + 2r + 1 = 4{,}5r$

$\Leftrightarrow r^2 - 2{,}5r + 1 = 0$

$\Delta = (-2{,}5)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 2{,}25 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-2{,}5)-\sqrt{2{,}25}}{2\times 1} = 0{,}5$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-2{,}5)+\sqrt{2{,}25}}{2\times 1} = 2$

Il faut donc que r soit égal à 0,5 ou 2.

114. Résolution d'inéquation

$\dfrac{2t}{1-t} > \dfrac{t+2}{t} \Leftrightarrow \dfrac{2t}{1-t} - \dfrac{t+2}{t} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2t\times t - (t+2)\times(1-t)}{(1-t)t} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2t^2 - (t - t^2 + 2 - 2t)}{(1-t)t} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3t^2 + t - 2}{(1-t)t} > 0$

Résolvons $3t^2 + t - 2 = 0$.

$\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 > 0$

$t_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-\sqrt{25}}{2\times 3} = -1$

$t_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{25}}{2\times 3} = \dfrac{2}{3}$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$3t^2+t-2$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$1-t$		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
t		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$\dfrac{3t^2+t-2}{(1-t)t}$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	

▶**Exercice 14**

Donc $\mathcal{S} =]-1\,;0[\cup \left]\dfrac{2}{3}\,;1\right[$.

115. Maison de vacances

Notons x le nombre de personnes prévues.

$\dfrac{2400}{x-2} = \dfrac{2400}{x} + 40 \Leftrightarrow \dfrac{2400}{x-2} = \dfrac{2400+40x}{x}$

$\Leftrightarrow 2\,400x = (2\,400 + 40x) \times (x - 2)$

$\Leftrightarrow 2\,400x = 2\,400x - 4\,800 + 40x^2 - 80x$

$\Leftrightarrow 40x^2 - 80x - 4\,800 = 0$

$\Delta = (-80)^2 - 4 \times 40 \times (-4\,800) = 774\,400 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-80)-\sqrt{774\,400}}{2\times 40} = -10$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-80)+\sqrt{774\,400}}{2\times 40} = 12$

12 personnes étaient donc prévues initialement.

116. Équation avec un paramètre

Si $m + 8 = 0$, donc $m = -8$, alors l'équation devient $-8x + 1 = 0$.

C'est une équation du premier dergé qui a une unique solution : $\frac{1}{8}$.

Si $m + 8 \neq 0$, on a une équation du second degré.

$\Delta = b^2 - 4ac$

Donc $\Delta = m^2 - 4 \times (m + 8) \times 1$.

L'équation admet une unique solution si et seulement si $\Delta = 0$.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 32 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-32) = 144 > 0$

$$m_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - \sqrt{144}}{2 \times 1} = -4$$

$$m_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + \sqrt{144}}{2 \times 1} = 8$$

Donc l'équation admet une unique solution si $m = -8$; $m = 4$ ou $m = 8$.

117. Résolution d'équations du troisième degré

1. a) $f(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 5 \times 1 + 6 = 0$

Donc 1 est solution de l'équation $f(x) = 0$.

b) $(x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$

$= ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$

Or $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -2 \\ c - b = -5 \\ -c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 + a \\ c = -5 + b \\ c = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -6 \\ c = -6 \end{cases}$$

Donc on a $f(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$ avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = -6$.

c) Résolvons l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, soit $x^2 - x - 6 = 0$.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times 1} = 3$$

d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(ax^2 + bx + c) = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $x^2 - x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -2$ ou $x = 3$

Donc les solutions de l'équation $f(x) = 0$, sont 1 ; -2 et 3.

De plus, $x^2 - x - 6 = 1 \times (x - (-2))(x - 3)$.

Donc $f(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$.

2. a) $2 \times 3^3 - 20 \times 3^2 - 618 \times 3 + 1\,980 = 0$

Donc 3 est solution de l'équation.

$(x - 3)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 3ax^2 - 3bx - 3c$

$= ax^3 + (b - 3a)x^2 + (c - 3b)x - 3c$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - 3a = -20 \\ c - 3b = -618 \\ -3c = 1980 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -20 + 3a \\ c = -618 + 3b \\ c = -660 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -14 \\ c = -660 \\ c = -660 \end{cases}$$

Donc $2x^3 - 20x^2 - 618x + 1\,980 = (x - 3) \times g(x)$ avec $g(x) = 2x^2 - 14x - 660$.

b) $2x^3 - 20x^2 - 618x + 1\,980 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)g(x) = 0$

$\Leftrightarrow x - 3 = 0$ ou $g(x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$ ou $g(x) = 0$

Résolvons l'équation $g(x) = 0$, soit $2x^2 - 14x - 660 = 0$.

$\Delta = (-14)^2 - 4 \times 2 \times (-660) = 5\,476 > 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-14) - \sqrt{5\,476}}{2 \times 2} = -15$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-14) + \sqrt{5476}}{2 \times 2} = 22$$

Donc les solutions de l'équation sont 3 ; -15 et 22.

118. Position relative d'une parabole et d'une droite

1. $\begin{cases} y = 2x^2 - 3x + 5 \\ y = 5x - 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x + 5 = 5x - 3 \\ y = 5x - 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + 8 = 0 \\ y = 5x - 3 \end{cases}$

Résolvons l'équation $2x^2 - 8x + 8 = 0$.

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 0$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \times 2} = 2$

Or $y = 5x - 3 = 5 \times 2 - 3 = 7$.

Donc la parabole et la droite ont un unique point d'intersection M(2 ; 7).

2. a) $f(x) - g(x) = 2x^2 - 3x + 5 - (5x - 3)$
$= 2x^2 - 8x + 8$

$a = 2 > 0$, donc on a :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		+	0	+	

b) $f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

La parabole est donc toujours située au-dessus de la droite sauf au point M, qui est le point d'intersection.

119. Position relative de deux paraboles

1. On conjecture :

- qu'il y a deux points d'intersection de coordonnées $(-2,5 ; 11,25)$ et $(3,5 ; -0,75)$;
- que sur $]-\infty ; -2,5[\cup]3,5 ; +\infty[$ la courbe d'équation $y = 3x^2 - 5x - 20$ est au-dessus de la courbe d'équation $y = x^2 - 3x - 2,5$;
- que sur $]-2,5 ; 3,5[$, la courbe d'équation $y = 3x^2 - 5x - 20$ est en dessous de la courbe d'équation $y = x^2 - 3x - 2,5$.

2. Étudions le signe de $(3x^2 - 5x - 20) - (x^2 - 3x - 2,5)$.

$(3x^2 - 5x - 20) - (x^2 - 3x - 2,5) = 2x^2 - 2x - 17,5$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times (-17,5) = 144 > 0$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{144}}{2 \times 2} = -2,5$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{144}}{2 \times 2} = 3,5$

x	$-\infty$		$-2,5$		$3,5$		$+\infty$
$2x^2 - 2x - 17,5$		+	0	−	0	+	

Donc :

- si $x = -2,5$,

$2x^2 - 2x - 17,5 = 0$

$3x^2 - 5x - 20 = x^2 - 3x - 2,5 = 11,25$

- si $x = 3,5$,

$2x^2 - 2x - 17,5 = 0$

$3x^2 - 5x - 20 = x^2 - 3x - 2,5 = -0,75$

- si $x \in]-\infty ; -2,5[\cup]3,5 ; +\infty[$,

$2x^2 - 2x - 17,5 > 0$

$(3x^2 - 5x - 20) > (x^2 - 3x - 2,5)$

- si $x \in]-2,5 ; 3,5[$,

$2x^2 - 2x - 17,5 < 0$.

$(3x^2 - 5x - 20) < (x^2 - 3x - 2,5)$

Donc la conjecture est bien démontrée.

120. Démonstration somme et produit

1. $\begin{cases} a + b = s \\ a \times b = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = s - a \\ a \times (s - a) = p \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = s - a \\ as - a^2 = p \end{cases}$

Donc $a^2 - as + p = 0$.

Donc a est solution de l'équation $x^2 - sx + p = 0$.

2. $\begin{cases} a + b = s \\ a \times b = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = s - b \\ (s - b) \times b = p \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = s - a \\ sb - b^2 = p \end{cases}$

Donc $b^2 - sb + p = 0$.

Donc b est solution de l'équation $x^2 - sx + p = 0$.

3. Résolvons l'équation $x^2 - 10x + 23,04 = 0$.

$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 23,04 = 7,84 > 0$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) - \sqrt{7,84}}{2 \times 1} = 3,6$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) + \sqrt{7,84}}{2 \times 1} = 6,4$

Donc les deux nombres sont 3,6 et 6,4.

121. Factorisation de $x^n - 1$ par $x - 1$

1. $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

2. $(x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$
$= ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$

Or $f(x) = x^3 - 1$.

$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = 0 \\ -c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = a \\ c = b \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ c = 1 \end{cases}$

Donc on a $f(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$

avec $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$.

3. a) $f(x) = x^4 - 1$

$f(x) = (x^2)^2 - 1^2$

$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

b) $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

c) $f(x) = (x - 1)(x^3 + x + x^2 + 1)$

$f(x) = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$

4. a) $f(1) = 1^n - 1 = 0$

b) Posons $g(x) = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1)$.

En développant, on obtient :

$g(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x - x^{n-1} - x^{n-2} - ... - 1$

$g(x) = x^n - 1$

Donc $f(x) = g(x) = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1)$.

122. Factorisation de $x^n - a$ par $x - a$

1. a) $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$

b) Si $a = 0$, $x^3 = x \times x^2$.

Supposons $a \neq 0$.

Montrons que $x^3 - a^3 = (x - a)(dx^2 + ex + f)$, avec d, e et f trois réels.

$$\begin{aligned}(x - a)(dx^2 + ex + f) &= dx^3 + ex^2 + fx - adx^2 - aex - af\\ &= dx^3 + (e - ad)x^2 + (f - ae)x - af\end{aligned}$$

$$\begin{cases} d = 1 \\ e - ad = 0 \\ f - ae = 0 \\ af = a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ e = ad \\ f = ae \\ f = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ e = a \\ f = a^2 \\ f = a^2 \end{cases}$$

Donc $x^3 - a^3 = (x - a)(dx^2 + ex + f)$

avec $d = 1$, $e = a$ et $f = a^2$.

Soit $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$.

c)
$$\begin{aligned}x^4 - a^4 &= (x^2)^2 - (a^2)^2\\ &= (x^2 - a^2)(x^2 + a^2)\\ &= (x - a)(x + a)\ (x^2 + a^2)\\ &= (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)\end{aligned}$$

2. Conjecture :

$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + ... + a^{n-2}x + a^{n-1})$

3. Posons :

$g(x) = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + ... + a^{n-2}x + a^{n-1})$

En développant, on obtient :

$g(x) = x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} ... + a^{n-2}x^2 + a^{n-1}x - ax^{n-1} - a^2x^{n-2} - ... - a^{n-1}x - a^n$

$g(x) = x^n - a^n$

Donc $f(x) = g(x) = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + ... + a^{n-2}x + a^{n-1})$.

123. Intersection entre parabole et droites

1. Si $x = k$, alors $y = 4k^2 - 8k + 7$.

Donc la parabole et la droite d'équation $x = k$ ont un unique point d'intersection de coordonnées $(k\ ;\ 4k^2 - 8k + 7)$.

2. $4x^2 - 8x + 7 = k \Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 7 - k = 0$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 4 \times (7 - k)$

$\Delta = -48 + 16k$

• Si $\Delta < 0$, soit $-48 + 16k < 0$, donc $k < 3$, alors l'équation n'a pas de solution, donc la parabole et la droite d'équation $y = k$ n'ont pas de point d'intersection.

• Si $\Delta = 0$, soit $-48 + 16k = 0$, donc $k = 3$, alors l'équation a une unique solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \times 4} = 1$$

Donc la parabole et la droite d'équation $y = k$ ont un unique point d'intersection de coordonnées $(1\ ;\ k)$.

• Si $\Delta > 0$, soit $-48 + 16k > 0$, donc $k > 3$, alors l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) - \sqrt{-48 + 16k}}{2 \times 4} = \frac{2 - \sqrt{k - 3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) + \sqrt{-48 + 16k}}{2 \times 4} = \frac{2 + \sqrt{k - 3}}{2}$$

Donc la parabole et la droite d'équation $y = k$ ont deux points d'intersection de coordonnées $\left(\frac{2 - \sqrt{k-3}}{2}\ ;\ k\right)$ et $\left(\frac{2 + \sqrt{k-3}}{2}\ ;\ k\right)$.

124. Nombre d'or et rectangle d'or

1. L'équation traduisant le problème est $\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}$.

2.
$$\begin{aligned}\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x} &\Leftrightarrow x^2 = x + 1\\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0\end{aligned}$$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\ ;\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$.

3. On commence par tracer un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 1 et AC = $\frac{1}{2}$.
D'après le théorème de Pythagore :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = \frac{5}{4}$

Donc $BC = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

On place le point D sur la demi droite [AC) tel que CD = CB.

On a alors $AD = AC + CD = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et AB = 1.

On place le point E tel que ABED soit un rectangle.
ABED est le rectangle voulu.

125. Vitesse du courant

Soit x la vitesse du courant.
À l'aller, le bateau va à une vitesse de $30 + x$.
Le temps mis par le bateau à l'aller est donc $\frac{50}{30+x}$.
Au retour, il va à une vitesse de $30 - x$.
Le temps mis par le bateau au retour est donc $\frac{50}{30-x}$.
Au retour, il a mis 15 minutes de plus qu'à l'aller, soit $\frac{1}{4}$ heure.

$$\frac{50}{30-x} = \frac{50}{30+x} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{50}{30-x} = \frac{4\times 50 + 30 + x}{4(30+x)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{50}{30-x} = \frac{230+x}{4(30+x)}$$
$$\Leftrightarrow 50\times 4(30+x) = (230+x)(30-x)$$
$$\Leftrightarrow 6\,000 + 200x = 6\,900 - 200x - x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 400x - 900 = 0$$

$\Delta = 400^2 - 4\times 1\times(-900) = 163\,600 > 0$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-400-\sqrt{163600}}{2\times 1} \approx -402{,}23$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-400+\sqrt{163600}}{2\times 1} \approx 2{,}24$$

Donc la vitesse du courant est environ de 2,24 km/h.

126. Placement sur un compte

$$5\,000\times\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1+\frac{t-0{,}5}{100}\right) = 5\,176{,}5$$
$$\Leftrightarrow 1+\frac{t}{100}+\frac{t-0{,}5}{100}+\frac{t(t-0{,}5)}{100\times 100} = \frac{5\,176{,}5}{5\,000}$$
$$\Leftrightarrow \frac{10\,000+100t+100(t-0{,}5)+t(t-0{,}5)}{10\,000} = \frac{5\,176{,}5}{5\,000}$$
$$\Leftrightarrow 10\,000 + 200t - 50 + t^2 - 0{,}5t = \frac{5\,176{,}5}{5\,000}\times 10\,000$$
$$\Leftrightarrow t^2 + 199{,}5t - 403 = 0$$

$\Delta = 199{,}5^2 - 4\times 1\times(-403) = 41412{,}25 > 0$

$$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-199{,}5-\sqrt{41412{,}25}}{2\times 1} = -201{,}5$$
$$t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-199{,}5+\sqrt{41412{,}25}}{2\times 1} = 2$$

Or $t \geqslant 0$, donc la valeur de t est 2.

127. Lieu géométrique

1. $AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2}$

Donc $AM^2 = (x-4)^2 + (y-1)^2$.

2. M est équidistant de A et de l'axe des abscisses si et seulement si $AM = y$.

3. $AM = y \Leftrightarrow AM^2 = y^2$
$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-1)^2 = y^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = y^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 - 2y + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2y = x^2 - 8x + 17$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{17}{2}$$

On reconnaît l'équation d'une parabole.

Vers la T^le^

128. 1. $2X^2 - 4X + 2 = 2(X^2 - 2X + 1)$
$$= 2(X-1)^2$$

Donc $2x^4 - 4x^2 + 2 = 2(x^2-1)^2$
$$= 2[(x-1)(x+1)]^2$$
$$= 2(x-1)^2(x+1)^2$$

2. Un carré est positif ou nul, donc, si $x = 1$ ou $x = -1$, alors $2x^4 - 4x^2 + 2 = 0$.

Et pour tout réel x tel que $x \neq 1$ et $x \neq -1$, on a $2x^4 - 4x^2 + 2 > 0$.

129. 1. Réponse **c)**.

$(x-3)^2 = \frac{4}{25}(2x-7)^2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 = \left(\frac{2}{5}(2x-7)\right)^2$

$\Leftrightarrow x-3 = \frac{2}{5}(2x-7)$ ou $x-3 = -\frac{2}{5}(2x-7)$

$\Leftrightarrow x-3 = \frac{4}{5}x - \frac{14}{5}$ ou $x-3 = -\frac{4}{5}x + \frac{14}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{5}x = \frac{1}{5}$ ou $\frac{9}{5}x = \frac{29}{5}$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \frac{29}{9}$

2. Réponse **b)**.

$\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times (-10) = 121$

130. a) $f_5(x) = x^2 + 10x + 9$

Or $(x+1)(x+9) = x^2 + 9x + x + 9$

$= x^2 + 10x + 9$

Donc $f_5(x) = (x+1)(x+9)$.

La proposition est vraie.

b) $f_m(0) = 0^2 + 2 \times m \times 0 + 9 = 9$

Donc $I(0\ ;\ 9)$ appartient à la courbe de f_m.

La proposition est vraie.

c) Si $m = -10$:

$f_{-10}(1) = 1^2 + 2 \times (-10) \times 1 + 9 = -10 < 0$

Donc la proposition est fausse.

c) Si $m = 1$ et $x = -1$:

$f_1(-1) = (-1)^2 + 2 \times 1 \times (-1) + 9 = 8$

$f_2(-1) = (-1)^2 + 2 \times 2 \times (-1) + 9 = 6$

$f_2(-1) < f_1(-1)$

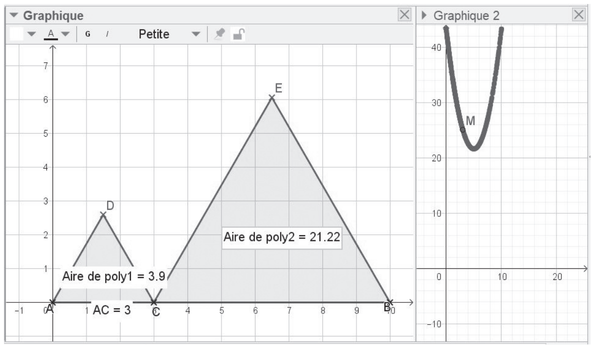
Donc la proposition est fausse.

Travaux pratiques p. 104-105

TP 1. Optimisation d'une aire

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Optimiser une aire, à l'aide d'une résolution graphique (logiciel de géométrie dynamique) et d'une résolution algébrique.

A. 1. à **8.**



9. La somme des aires est minimale lorsque AC = 5.

La valeur minimale est environ 21,65.

B. 1. La hauteur dans un triangle équilatéral de côté a vaut $\sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

L'aire d'un triangle équilatéral de côté a est $\frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$.

Donc $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times (10-x)^2$.

$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times (100 - 20x + x^2)$

$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times x^2 - 5\sqrt{3}x + 25\sqrt{3}$

2. $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5\sqrt{3}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = 5$

$\beta = f(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 5^2 - 5\sqrt{3} \times 5 + 25\sqrt{3}$

$= \frac{25\sqrt{3}}{2}$

$a = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, donc :

x	0	5	10
f	$25\sqrt{3}$ ↘	$\frac{25\sqrt{3}}{2}$	↗ $25\sqrt{3}$

3. Le minimum de f est $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ et il est atteint pour $x = 5$.

TP 2. Programme pour déterminer les racines d'un trinôme

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Compléter et tester un programme en Python permettant de déterminer les racines d'un trinôme.

1.

```
def f(a,b,c):
    d=b**2-4*a*c
    if d<0 :
        print("Pas de solution")
    else :
        if d=0 :
            x= -b/(2*a)
            print("La racine est",x)
        else :
            x1=(-b-sqrt(d))/(2*a)
            x2=(-b+sqrt(d))/(2*a)
            print("Les deux racines sont",x1,"et",x2)
```

2. a) Il affiche `Pas de solution`.

b) Il affiche `La racine est -1`.

c) Il affiche `Les deux racines sont 1 et -2`.

3. a) $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$

Le trinôme n'a pas de racine réelle.

b) $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \times 1} = -1$$

Le trinôme a une unique racine qui est -1.

b) $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 1$$

Le trinôme a deux racines qui sont -2 et 1.

TP 3. Distance d'arrêt, distance de freinage

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Utiliser les fonctions polynômes de degré 2 pour modéliser un problème concret : la distance d'arrêt et la distance de freinage d'une voiture.

1. Voir la feuille de calcul.

2. Dans la cellule B2 il faut rentrer la formule `=A2/10*3`

3. Dans la cellule C2 il faut rentrer la formule `=1/2*(A2/10)^2`

Dans la cellule D2 il faut rentrer la formule `=1/2*(A2/10)^2*1.5`

4. Dans la cellule E2 il faut rentrer la formule `=B2+C2`.

Dans la cellule F2 il faut rentrer la formule `=B2+D2`.

5. $67{,}5 - 56 = 11{,}5$

Pour un conducteur roulant à vitesse maximale sur route sèche, la distance d'arrêt a diminué de 11,5 m.

$87{,}75 - 72 = 15{,}75$.

Pour un conducteur roulant à vitesse maximale sur route sèche, la distance d'arrêt a diminué de 15,75 m.

B. 1. $f(x) = \frac{x}{10} \times 3 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{x}{10}\right)^2$

$$f(x) = \frac{x^2}{200} + \frac{3x}{10}$$

2. a) $f(45) = \frac{45^2}{100} + \frac{3 \times 45}{10} = 23{,}625 < 25$

Donc il ne percutera pas l'obstacle.

b) $f(50) = \frac{50^2}{100} + \frac{3 \times 50}{10} = 27{,}5 > 25$

Donc il percutera l'obstacle.

3. $f(x) < 50 \Leftrightarrow \frac{x^2}{200} + \frac{3x}{10} - 50 < 0$

$$\Delta = \left(\frac{3}{10}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{200} \times (-50) = \frac{109}{100} > 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{3}{10} - \sqrt{\frac{109}{100}}}{2 \times \frac{1}{200}} = -30 - 10\sqrt{109}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{3}{10} + \sqrt{\frac{109}{100}}}{2 \times \frac{1}{200}} = -30 + 10\sqrt{109}$$

Or $x \geqslant 0$. Donc, pour pouvoir s'arrêter avant l'obstacle, il doit rouler à une vitesse maximale de $-30 + 10\sqrt{109}$, soit environ 74,4 km/h.

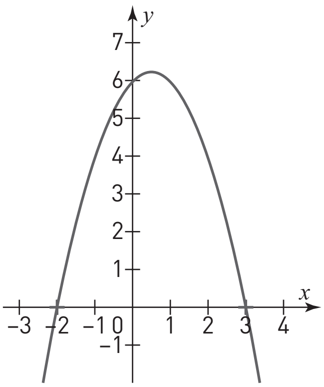
En autonomie p. 106-107

Étudier une fonction polynôme de degré 2

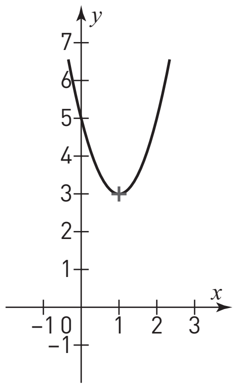
131. c **132. c**

133. c **134. d**

135. a)



b)



136. 1. $x^2 + 12x + 36 = (x+6)^2$

2. $f(x) = (x+6)^2 - 36 - 7 = (x+6)^2 - 43$

3. $\alpha = -6$; $\beta = -43$ et $a = 1 > 0$.

x	$-\infty$	-6	$+\infty$
f	$\searrow$	-43	$\nearrow$

Le sommet a pour coordonnées $(-6\ ;\ -43)$ et l'axe de symétrie a pour équation $x = -6$.

137. 1. $f(x) = 2\left(x^2 - 3x + \dfrac{3}{2}\right)$

$$f(x) = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\right]$$

$$f(x) = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\right]$$

$$f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$$

2. $f(x) = 2\left[\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{3}{4}\right]$

$$f(x) = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]$$

$$f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$f(x) = 2\left(x - \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$$

3. Le sommet de la parabole a pour coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ -\dfrac{3}{2}\right)$.

Les points d'intersection entre la parabole et l'axe des abscisses ont pour coordonnées $\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\ ;\ 0\right)$ et $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\ ;\ 0\right)$

Résoudre des équations

138. b **139.** c **140.** b

141. a) $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$

Donc $\mathcal{S} = \varnothing$.

b) $\Delta = \left(-\dfrac{6}{5}\right)^2 - 4 \times 3 \times \dfrac{3}{25} = 0$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{6}{5}}{2 \times 3} = \frac{1}{5}$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{5}\right\}$.

c) $\Delta = (-8{,}5)^2 - 4 \times (-5) \times (-1{,}5) = 42{,}25 > 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8{,}5) - \sqrt{42{,}25}}{2 \times (-5)} = -0{,}2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8{,}5) + \sqrt{42{,}25}}{2 \times (-5)} = -1{,}5$$

Donc $\mathcal{S} = \{-1{,}5\ ;\ -0{,}2\}$.

142.1. Soit x le nombre que l'on cherche.

$$x + \frac{1}{x} = 2{,}05$$

2. $x + \dfrac{1}{x} = 2{,}05 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+1}{x} = 2{,}05$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 2{,}05x$

$\Leftrightarrow x^2 - 2{,}05x + 1 = 0$

$\Delta = (2{,}05)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0{,}2025 > 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2{,}05) - \sqrt{0{,}2025}}{2 \times 1} = 0{,}8$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2{,}05) + \sqrt{0{,}2025}}{2 \times 1} = 1{,}25$$

Donc le nombre est soit 0,8 soit 1,25.

Résoudre des inéquations

143. c **144.** a

145. 1. $\Delta = (-9{,}6)^2 - 4 \times (-8) \times 5{,}12 = 256 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-9{,}6)-\sqrt{256}}{2\times(-8)} = 0{,}4$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-9{,}6)+\sqrt{256}}{2\times(-8)} = -1{,}6$

x	$-\infty$		$-1{,}6$		$0{,}4$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. $\mathscr{S} = [-1{,}6\ ;\ 0{,}4]$

3. $\mathscr{S} = [-\infty\ ;\ -1{,}6[\cup]0{,}4\ ;\ +\infty[$

146. Résolvons $-x^2 + 3x - 5 = 0$.

$\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = -11 < 0$

Donc l'équation n'a pas de solution.

Résolvons $3x^2 + 0{,}6x - 2{,}97 = 0$.

$\Delta = 0{,}6^2 - 4 \times 3 \times (-2{,}97) = 36 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-0{,}6-\sqrt{36}}{2\times 3} = -1{,}1$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-0{,}6+\sqrt{36}}{2\times 3} = 0{,}9$

Donc l'équation a deux solutions $-1{,}1$ et $0{,}9$.

Donc on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-1{,}1$		$0{,}9$		$+\infty$
$-x^2+3x-5$		$-$		$-$		$-$	
$3x^2+0{,}6x-2{,}97$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\dfrac{-x^2+3x-5}{3x^2+0{,}6x-2{,}97}$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	

Donc $\mathscr{S} =]-1{,}1\ ;\ 0{,}9[$.

Utiliser les propriétés des racines

147. d **148.** a

149. 1. $f(1) = 7 \times 1^2 - 5{,}6 \times 1 - 1{,}4 = 0$

Donc 1 est une racine de f.

2. Le produit des deux racines vaut $\dfrac{c}{a}$.

Donc $x_1 \times x_2 = \dfrac{-1{,}4}{7}$.

$1 \times x_2 = -\dfrac{1{,}4}{7}$

Donc $x_2 = -0{,}2$.

Donc la deuxième racine vaut $-0{,}2$.

150. f admet deux racines qui sont -2 et 5.

Pour tout réel x :

$f(x) = a(x-(-2))(x+5)$

$f(x) = a(x+2)(x-5)$

Or $f(1) = 7$.

Donc $a \times (1+2) \times (1-5) = 7$.

Donc $a = \dfrac{7}{3\times(-4)} = -\dfrac{7}{12}$.

Donc $f(x) = -\dfrac{7}{12}(x+2)(x-5)$.

Modéliser et résoudre des problèmes

151. a **152.** a

153. 1. $x \in [0\ ;\ 2]$

2. $S(x) = 4 \times \dfrac{1}{2}x^2 + 6 \times x = 2x^2 + 6x$

3. Si $x = 1$, alors $S(x) = 2 \times 1^2 + 6 \times 1 = 8$.

4. $S(x) = 13{,}5 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 13{,}5 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4 \times 2 \times (-13{,}5) = 144 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6-\sqrt{144}}{2\times 2} = -\dfrac{9}{2}$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6+\sqrt{144}}{2\times 2} = \dfrac{3}{2}$

Or $x \in [0\ ;\ 2]$.

Donc on a $S(x) = 13{,}5$ lorsque $x = \dfrac{3}{2}$.

CHAPITRE 4 Dérivation

Manuel p. 110-141

I. Introduction

Objectifs du chapitre

Un point fondamental du programme de Première est étudié dans ce chapitre : l'étude de la dérivation, du point de vue local (nombre dérivé) et du point de vue global (fonction dérivée).

On introduit le nombre dérivé à partir de la perception intuitive de ce qu'est la limite du taux de variation ; on s'appuie à la fois sur des représentations graphiques fournies par les outils logiciels, sur le calcul algébrique du taux de variation dans des cas simples et sur l'approximation affine d'une fonction de référence. Le taux de variation et le nombre dérivé sont illustrés dans des contextes variés : géométrique (sécante, tangente), physique (vitesse moyenne, vitesse instantanée), économique (accroissement moyen, coût marginal).

Puis, on prépare le chapitre suivant en étudiant le concept de fonction dérivée : étude de la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle, dérivées des fonctions usuelles, opérations et dérivations...

Capacités

- **Déterminer un nombre dérivé à l'aide du taux de variation.**
- **Déterminer l'équation réduite d'une tangente.**
- **Déterminer un nombre dérivé par lecture graphique du coefficient directeur d'une tangente.**
- **Déterminer une fonction dérivée à l'aide des fonctions de référence et des théorèmes d'opérations sur les dérivées.**
- **Déterminer la fonction dérivée d'une fonction de la forme $g(ax + b)$.**

II. Corrigés des activités et exercices

Pour prendre un bon départ p. 111

1. Lire graphiquement l'équation réduite d'une droite

1. d_1 a pour coefficient directeur 0 et pour ordonnée à l'origine 5.

d_2 a pour coefficient directeur $-\frac{1}{4}$ et pour ordonnée à l'origine 2,5.

d_3 a pour coefficient directeur 1 et pour ordonnée à l'origine −3.

d_4 a pour coefficient directeur $\frac{2}{3}$ et pour ordonnée à l'origine −4.

2. d_1 a pour équation $y = 5$.

d_2 a pour équation $y = -\frac{1}{4}x + 2{,}5$.

d_3 a pour équation $y = x - 3$.

d_4 a pour équation $y = \frac{2}{3}x - 4$.

2. Déterminer l'équation réduite d'une droite

Le coefficient directeur est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Donc $m = \frac{-4-1}{9-7} = \frac{-5}{2}$.

Donc la droite a une équation de la forme $y = -\frac{5}{2}x + p$.

Les coordonnées de A (ou de B) doivent vérifier l'équation, donc $1 = -\frac{5}{2} \times 7 + p$.

On en déduit $1 + \frac{35}{2} = p$. Donc $p = \frac{37}{2}$.

Ainsi, l'équation de la droite (AB) est $y = -\frac{5}{2}x + \frac{37}{2}$.

3. Lire des images et des antécédents

1. $f(0) = -2$; $f(2) = 0$; $f(6) = 3$; $f(-4) = 3$

2. Les antécédents de 3 par f sont −4 ; 3 ; 6.

4. Calculer des images

1. $f(2) = 2^2 - 6 + 1 = -1$

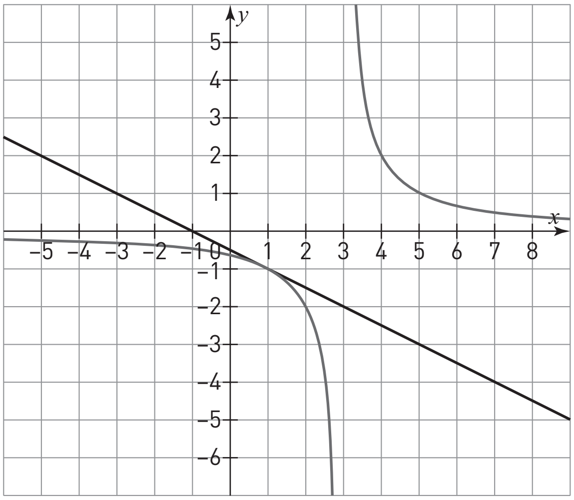
$f\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}^2 - 3\sqrt{3} + 1 = 4 - 3\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} f\left(2+\sqrt{3}\right) &= \left(2+\sqrt{3}\right)^2 - 3\left(2+\sqrt{3}\right) + 1 \\ &= 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 6 - 3\sqrt{3} + 1 \\ &= 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} f(1+h) &= (1+h)^2 - 3(1+h) + 1 \\ &= 1 + 2h + h^2 - 3 - 3h + 1 \\ &= h^2 - h - 1 \end{aligned}$$

5. Représenter graphiquement des fonctions

1.



2. Voir GeoGebra.

6. Développer, réduire, simplifier

1. a) $A^2 = (2x+7)^2 = 4x^2 + 28x + 49$

b) $A \times B = (2x+7)(3-x) = -2x^2 - x + 21$

c) $$\begin{aligned} -B - 2A &= -(3-x) - 2(2x+7) = -3 + x - 4x - 14 \\ &= -3x - 17 \end{aligned}$$

d) $A - B = 2x + 7 - (3-x) = 2x + 7 - 3 + x = 3x + 4$

2. a) $$\begin{aligned} A + C &= 2x + 7 + \frac{2x-5}{x+1} = \frac{(2x+7)(x+1) + 2x - 5}{x+1} \\ &= \frac{2x^2 + 7x + 2x + 7 + 2x - 5}{x+1} = \frac{2x^2 + 11x + 2}{x+1} \end{aligned}$$

b) $$\frac{C}{B} = \frac{\frac{2x-5}{x+1}}{3-x} = \frac{2x-5}{x+1} \times \frac{1}{3-x} = \frac{2x-5}{-x^2+2x+3}$$

c) $$\begin{aligned} B - C &= 3 - x - \frac{2x-5}{x+1} = \frac{(3-x)(x+1) - (2x-5)}{x+1} \\ &= \frac{3x + 3 - x^2 - x - 2x + 5}{x+1} = \frac{-x^2 + 8}{x+1} \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} C - \frac{1}{A} &= \frac{2x-5}{x+1} - \frac{1}{2x+7} \\ &= \frac{(2x-5)(2x+7) - 1(x+1)}{(x+1)(2x+7)} = \frac{4x^2 + 3x - 36}{(x+1)(2x+7)} \end{aligned}$$

Activités p. 112-115

Activité 1. Calculer un taux de variation

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Calculer un taux de variation par une approche numérique et graphique.

1. La consommation est croissante sur [4 ; 8] et [16 ; 19].

2. Elle semble plus rapide sur [4 ; 8].

3. $\dfrac{f(8) - f(4)}{8 - 4} = 5$; $\dfrac{f(19) - f(16)}{19 - 16} = \dfrac{10}{3}$

Cela confirme la réponse précédente.

4. $m_{(AB)} = 5$ et $m_{(CD)} = \dfrac{10}{3}$.

5. f est décroissante sur [0 ; 4] et [19 ; 24].

6. $\dfrac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = -\dfrac{5}{2}$; $\dfrac{f(24) - f(19)}{24 - 19} = -4$

Les résultats sont négatifs.

Activité 2. Calculer un accroissement moyen, une vitesse moyenne

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Découvrir la notion d'accroissement moyen infinitésimal par deux approches différentes au choix (économique et physique) et construire la tangente.

A. ou **B.**

1. $f(2) = 96$

2. $\dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 48$

3.

	[0 ; 0,5]	[0,5 ; 1]	[1 ; 1,5]	[1,5 ; 2]
Acc. Moy.	63	21	27	81

Non car l'accroissement moyen (ou la vitesse moyenne) dépend de l'intervalle de temps que l'on choisit. On peut choisir plein d'autres intervalles sur lesquels les résultats seront très différents.

4. $\dfrac{f(0{,}51) - f(0{,}5)}{0{,}01} \approx \dfrac{31{,}836 - 31{,}5}{0{,}01} \approx 33{,}6$

$\dfrac{f(0{,}501) - f(0{,}5)}{0{,}001} \approx \dfrac{31{,}53396 - 31{,}5}{0{,}001} \approx 33{,}96$

L'accroissement moyen du coût (ou la vitesse moyenne) entre 0,5 et « juste après » 0,5 semble tendre vers 34 €/h (ou 34 km/h).

C. Voir GeoGebra.

Activité 3. Découvrir la dérivée de la fonction carré $f : x \mapsto x^2$

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Construire point par point la courbe de la dérivée de la fonction carré.

A. Voir le fichier à télécharger.

B. 1. Voir GeoGebra.

2. a) Voir GeoGebra.

b) m est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a, donc, par définition, $m = f'(a)$.

3. On constate que les points sont alignés.

4. Voir GeoGebra.

5. a) La fonction f' associe à chaque réel x le nombre dérivé $f'(x)$. Donc la courbe $\mathscr{C}_{f'}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,f'(x))$: cela correspond aux points A′ tracés à la question **3.**

b) On observe que les points A′ ainsi obtenus sont tous alignés et leur « trace » forme une droite passant par l'origine. $\mathscr{C}_{f'}$ semble donc être la représentation graphique d'une fonction linéaire ; et, comme $f'(1) = 2$,alors on peut conjecturer que, pour tout réel x, $f'(x) = 2x$.

c) Voir la démonstration p. 118 du manuel (« Exemple »).

Activité 4. Dériver une somme de fonctions

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Conjecturer puis démontrer le théorème de la dérivée d'une somme de fonctions dérivables.

1. « Si $f(x) = u(x) + v(x)$, alors $f'(x) = u'(x) + v'(x)$. »

2. a) $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{u(a+h) + v(a+h) - u(a) - v(a)}{h}$

$= \dfrac{u(a+h) - u(a) + v(a+h) - v(a)}{h}$

$= \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} + \dfrac{v(a+h) - v(a)}{h}$

b)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

Donc $f'(a) = u'(a) + v'(a)$.

Activité 5. Dériver un produit de fonctions

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Conjecturer, puis démontrer, le théorème de la dérivée d'un produit de fonctions dérivables.

1. a) Conjecture : « $f'(x) = u'(x) \times v'(x)$. »

b) $f(x) = x^3 + x^2$

c) $f'(x) = 3x^2 + 2x$

d) $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$,

donc $u'(x) \times v'(x) = 2x$.

Donc la conjecture est fausse car $u'(x) \times v'(x) \neq f'(x)$.

2. Conjecture : « Si $f(x) = u(x) \times v(x)$, alors $f'(x) = u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x)$. »

3. a) et **b)** Voir la démonstration p. 120 du manuel.

Activité 6. Découvrir la composition de fonctions

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Découvrir la composition de fonctions.

1. Avec le programme A, 1 donne 9, puis 9 donne 3 avec le programme B. Donc 3 est le résultat final.

2. 10 donne 36 avec A, puis 36 donne 6 avec B. Donc 6 est le résultat final.

-1 donne 3 avec A, puis 3 donne $\sqrt{3}$ avec B. Donc $\sqrt{3}$ est le résultat final.

3. Avec le programme A, -5 donne -9. Et la racine carrée de -9 n'est pas possible, donc on ne peut pas appliquer le programme B.

4. Le nombre de départ x doit vérifier la condition : $3x + 6 \geqslant 0$.

5. $g(x) = 3x + 6$

6. $h(x) = \sqrt{3x + 6}$

À vous de jouer ! p. 124-127

1. $g(-1+h) = (-1+h+2)^2 = (h+1)^2 = h^2+2h+1$ et $g(-1) = 1$.

Donc $\dfrac{g(-1+h)-g(-1)}{h} = \dfrac{h^2+2h}{h} = h+2$. Le taux de variation entre -1 et $-1+h$ tend vers 2 quand h tend vers 0, donc g est dérivable en -1 et $g'(-1) = 2$.

2. $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{\dfrac{-7}{1-h}+7}{h} = \dfrac{-7}{1-h}$

Si h tend vers 0, alors $\dfrac{-7}{1-h}$ tend vers -7.

Ainsi, la fonction $h(x)$ est dérivable en 2 et son nombre dérivé en 2 est -7.

$h(2) = -7$

3. $\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h} = \dfrac{\sqrt{5\times(4+h)}-2\sqrt{5}}{h}$

$= \dfrac{\sqrt{5}\left[\left(\sqrt{4+h}\right)-2\right]}{h} = \dfrac{h\sqrt{5}}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}$

(en multipliant par l'expression conjuguée)

$= \dfrac{\sqrt{5}}{\left(\sqrt{4+h}\right)+2}$

Si h tend vers 0, alors $\dfrac{\sqrt{5}}{\left(\sqrt{4+h}\right)+2}$ tend vers $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

Ainsi, la fonction $f(x)$ est dérivable en 4 et son nombre dérivé est $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

$f'(4) = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$

4. $y = 2(x-4)-1 = 2x-7$

5. $y = h'(-3)(x+3)+h(-3)$

$y = -4x-5$

6. $g(-3) = 3$; $g(2) = 2$; $g(6) = -4$;

$g'(-3) = \dfrac{1}{2}$; $g'(2) = -2$; $g'(6) = \dfrac{3}{2}$

7. • $h(-3) = 5$ et $h'(-3) = 0$.

• $h(0) = 2$ et $h'(0) = -\dfrac{2}{3}$.

• $h(4) = 1$ et $h'(4) = \dfrac{1}{4}$.

8. a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 10x-3$.

b) g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

c) h est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $h'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$.

d) j est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{2}{9}\right\}$ et $j'(x) = \dfrac{-118}{(9x+2)^2}$.

9. a) $f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = -4{,}8x^3+21x^2-1$

b) $g(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 3x^4 - \dfrac{1}{3}x^2$

c) $h(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$h'(x) = 33x^2-24x^3$

d) $j(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{9}{10}\right\}$.

$j'(x) = \dfrac{250}{(-10x+9)^2}$

10. • $f = u+v$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$f'(x) = x - \dfrac{4}{x^5}$

• $g = u\times v$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$g'(x) = \dfrac{-9}{x^2}$

• $h = k\times\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$h'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2}$

• $i = \dfrac{u}{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-7}{4}\right\}$.

$i'(x) = \dfrac{4x^2+14x+4}{(4x+7)^2}$

11. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -45(-9x+1)^4$.

12. On pose $X = 3x-1$.

Ainsi, $f(X) = \sqrt{X}$.

f est la fonction racine carrée dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

$f'(X) = \dfrac{1}{2\sqrt{X}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$

Exercices d'application p. 128-130

Apprendre à apprendre

13. Voir le cours p. 116 et p. 118 du manuel.

14.

$f(x)$	f dérivable sur :	$f'(x)$
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$]0\ ;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^n	$\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^*$ si n est négatif)	nx^{n-1}

15.

Fonction f sous la forme	Fonction dérivée f'
$u + v$	$u' + v'$
uv Cas particulier : ku ($k \in \mathbb{R}$)	$u'v + v'u$ ku'
$\frac{u}{v}$ Cas particulier : $\frac{1}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$ $-\frac{1}{v^2}$

Questions – Flash

16. $\dfrac{3^3 - 1^3}{3 - 1} = \dfrac{26}{2} = 13$

17. $\dfrac{6 - 4}{5 - 2} = \dfrac{2}{3}$

18. Oui car $\frac{1}{2}h + 3$ tend vers un nombre unique 3 lorsque h tend vers 0.

Donc $f'(5) = 3$.

19. $f'(-2) = \dfrac{6 - 1}{1 - (-2)} = \dfrac{5}{3}$ car c'est le coefficient directeur de la tangente au point A d'abscisse -2.

20. $g'(2) = \dfrac{3}{4}$ car c'est le coefficient directeur de la tangente en 2.

21. $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -7x + 4$

22. $f'(x) = 2x$. Donc $f'(-8) = -16$.

23. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Donc $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$.

24. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Donc $f'(4) = \dfrac{1}{4}$.

Taux de variation

25. $\dfrac{-27 - (-12)}{7 - 4} = -5$

26. $\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\times\left(-\frac{1}{2}\right) - (1^3 - 3\times 1)}{-\frac{1}{2} - 1} = -\dfrac{9}{4}$

27. $\dfrac{\frac{1}{1+3} - \frac{1}{1+1}}{3 - 1} = -\dfrac{1}{8}$

28. $\dfrac{(2+\sqrt{3})^2 + 1 - (2^2 + 1)}{(2+\sqrt{3}) - 2} = 4 + \sqrt{3}$

29. $\dfrac{(-3) - 1}{1 - (-1)} = -2$

30. $\dfrac{(11\times(3+h) - 7) - (11\times 3 - 7)}{h} = 11$

31. 1. $g(1) = 5$

2. $g(1 + h) = 5 + 10h + 5h^2$

3. $\dfrac{5 - (5 + 10h + 5h^2)}{1 - (1 + h)} = 10 + 5h$

32. 1. $f(-2) = -14$

2. $f(-2 + h) = -14 + 4h + h^2$

3. $\dfrac{(-14 + 4h + h^2) - (-14)}{(-2 + h) - (-2)} = 4 + h$

Nombre dérivé et définition

33. $\dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = 2 + h$ tend vers 2 lorsque h se rapproche de zéro, donc f est dérivable en 4 et $f'(4) = 2$.

34. $\frac{5}{3}(4h+9)$ tend vers 15 lorsque h se rapproche de 0, donc f est dérivable en -7 et $f'(-7) = 15$.

35. $\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = -\frac{9}{h}$

Lorsque h se rapproche de 0, $-\frac{9}{h}$ n'a pas de résultat, donc f n'est pas dérivable en 4.

36. $\frac{g(x)-g(3)}{x-3} = 2x+3$

Lorsque x se rapproche de 3, $(2x+3)$ tend vers un unique nombre réel 9, donc g est dérivable en 3 et $g'(3) = 9$.

37. Lorsque h se rapproche de 0, $h^2 + 3h - 4$ tend vers -4, donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = -4$.

38. 1. $f(3+h) = 6h + h^2 + 10$

$f(3) = 10$

Donc $\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = h + 6$.

2. Lorsque h se rapproche de 0, $(h+6)$ tend vers 6, donc f est dérivable en 3 et $f'(3) = 6$.

3. $\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = -4 + h$

Lorsque h se rapproche de 0, $(-4+h)$ tend vers -4, donc f est dérivable en -2 et $f'(-2) = -4$.

39. 1. $\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = \frac{1}{-3+h}$

2. Lorsque h se rapproche de 0, $\frac{1}{-3+h}$ tend vers $\frac{1}{-3}$, donc f est dérivable en -3 et $f'(-3) = -\frac{1}{3}$.

3. $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = -\frac{1}{1+h}$

Lorsque h se rapproche de 0, $-\frac{1}{1+h}$ tend vers -1, donc f est dérivable en -1 et $f'(1) = -1$.

40. 1. $f(9+h) = \sqrt{9+h} - 3$

$f(9) = 0$

$$\frac{f(9+h)-f(9)}{h} = \frac{\sqrt{9+h}-3}{h} \times \frac{\sqrt{9+h}+3}{\sqrt{9+h}+3} = \frac{1}{\sqrt{9+h}+3}$$

2. Lorsque h se rapproche de 0, $\frac{1}{\sqrt{9+h}+3}$ tend vers $\frac{1}{6}$, donc f est dérivable en 9 et $f'(9) = \frac{1}{6}$.

41. 1. $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{2x^2-7-(-5)}{x-1} = \frac{2(x^2-1)}{x-1}$

$= \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 2(x+1)$

2. $\lim\limits_{x\to 1} 2(x+1) = 4$

Donc $f'(1) = 4$.

3. $\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \frac{(2x^2-7)-1}{x+2} = \frac{2(x^2-4)}{x+2}$

$= \frac{2(x-2)(x+2)}{x+2} = 2(x-2)$

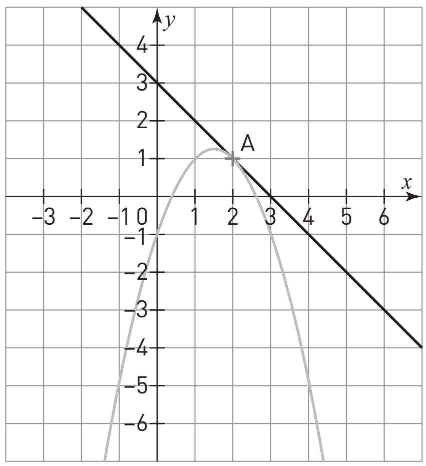
$\lim\limits_{x\to -2} 2(x-2) = -8$

Donc $f'(-2) = -8$.

Nombre dérivé et tangente

42. $g(3)$; $g'(3) = -\frac{1}{2}$

43.



Équation réduite d'une tangente

44. $g'(1) = -10$; $g(1) = 1$

$T : y = g'(1)(x-1) + g(1)$

$y = -10(x-1) + 1$

$y = -10x + 11$

Fonctions dérivées

45. • f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f(x) = 4x^3$.

• g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 12x^{11}$.

• h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $h'(x) = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$.

• i est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $i'(x) = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$.

• j est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $j'(x) = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$.

• k est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $k'(x) = -5x^{-6} = -\dfrac{5}{x^6}$.

46. • $u(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$;

$v(x) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(x) = 1$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$:

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + 1$.

• $u(x) = -5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 0$;

$v(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $v'(x) = \dfrac{-2}{x^3}$.

Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$: $g'(x) = \dfrac{-2}{x^3}$.

• $u(x) = x^4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 4x^3$; $v(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(x) = 2x$.

Donc h dérivable sur $\mathbb{R}$: $h'(x) = 4x^3 + 2x$.

47. • $k = -1$

$u(x) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$u'(x) = 1$.

Donc $f = ku$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = -1$

• $k = \dfrac{1}{2}$

$u(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$u'(x) = 2x$.

Donc $g = ku$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) = x$

• $k = \dfrac{2}{7}$

$u(x) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 1$.

Donc $h = ku$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$h'(x) = \dfrac{2}{7}$

• $k = 4$

$u(x) = x^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $u'(x) = -x^{-2}$.

Donc $i = ku$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$i'(x) = -4x^{-2}$

• $k = 7$

$u(x) = x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$u'(x) = 3x^2$.

$j = ku$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$j'(x) = 21x^2$

• $k = -\dfrac{5}{8}$

$u(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ku est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

$k'(x) = -\dfrac{5}{16\sqrt{x}}$

48. $f'(x) = -4x + 3$

$g'(x) = 3x^3 + \dfrac{7}{3}x^2$

49. • $u(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$;

$v(x) = (9 - 6x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$f'(x) = \dfrac{-9}{x^2}$

• $u(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$;

$v(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Donc g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

$g'(x) = \dfrac{5x\sqrt{x}}{2}$

• $u(x) = (x^5 + x^3)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$;

$v(x) = (x^2 - 4)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc j est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$j'(x) = (-12x^2 + 7x^6 - 15x^4)$

50. 1. $v(x) = 2x + 8$

$2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -4$

2. $v(x)$ est une fonction affine, donc dérivable sur I, et $v(x) \neq 0$ sur I, donc $f(x)$ est dérivable sur I et on a :

$f'(x) = \dfrac{-2}{(2x+8)^2}$

51. 1. $u(x) = 1 - 2x$ et $v(x) = 3x + 3$

$3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

2. $u(x)$ et $v(x)$ sont des fonctions affines, donc dérivables sur I, et $v(x) \neq 0$ sur I, donc $f(x)$ est dérivable sur I.

$u'(x) = -2$ et $v'(x) = 3$.

3. $f'(x) = \dfrac{-9}{(3x+3)^2}$

52. 1. $f(X) = \sqrt{X}$; $g(x) = -3x + 12$

2. Si $x \in$ I, alors $x < 4$ et donc $g(x) > 0$, donc $X = g(x) \in \,]0\,;+\infty[$. Or f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, donc h est dérivable sur I.

3. $f'(X) = \dfrac{1}{2\sqrt{X}}$ et $g'(x) = -3$.

4. $h'(x) = \dfrac{-3}{2\sqrt{-3x+12}}$

53. • $f = u + v$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 5x^4 - 3$

• $g = u \times v$

g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

$g'(x) = \dfrac{-17x+8}{2\sqrt{x}}$

• $h = \dfrac{u}{v}$

h est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

$h'(x) = \dfrac{14}{(x+1)^2}$

• $i = \dfrac{1}{x}$

i est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\sqrt{7}\right\}$.

$i(x) = \dfrac{-x^2+7}{(x^2-7)^2}$

Calculs et automatismes

54. a) $6 + 3h$ **b)** -24 **c)** $-\dfrac{1}{12}$ **d)** $-\dfrac{1}{4}$

55. a) 125 **b)** -64 **c)** $6(2x-5)^2$ **d)** 18

Exercices d'entraînement p. 131-134

Taux de variation

56. $f(6) = 5$; $f(10) = 26$, donc $\dfrac{f(10)-f(6)}{10-6} = 6$.

57. $\dfrac{g(2+h)-g(2)}{h} = \dfrac{\dfrac{2}{2+h}-1}{h} = \dfrac{\dfrac{2-(2+h)}{(2+h)}}{h} = -\dfrac{1}{2+h}$

58. 1. $\dfrac{f(8)-f(7)}{8-7} = \dfrac{17{,}6-17{,}1}{1} = 0{,}5$

L'accroissement moyen correspondant à une telle augmentation est de 500 €.

2. Pour $x \neq 8$, $\dfrac{f(x)-f(8)}{x-8} = 0{,}5$

$\Leftrightarrow f(x) - 17{,}6 = 0{,}5(x-8)$

$\Leftrightarrow -0{,}1x^2 + 2x + 8 - 17{,}6 = 0{,}5x - 4$

$\Leftrightarrow -0{,}1x^2 + 1{,}5x - 5{,}6 = 0$

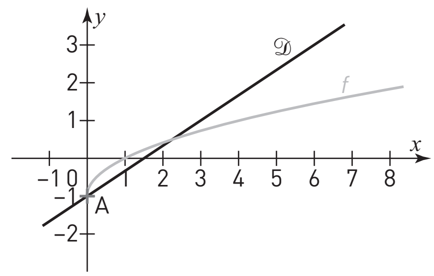
$\Leftrightarrow x = 7$ ou $x = 8$

Aucune de ces solutions ne convient. Donc c'est impossible.

59. 1. $\dfrac{f(a) = f(0)}{a = 0} = \dfrac{\sqrt{a}}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$

Sachant que $a > 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow a = \dfrac{9}{4}$.

2.



Nombre dérivé – Tangente

60. 1. $t = 7$; $t = 6{,}1$; $t = 6{,}01$;

$t = 6{,}001$; $t = 6{,}0001$; $t = 6{,}00001$

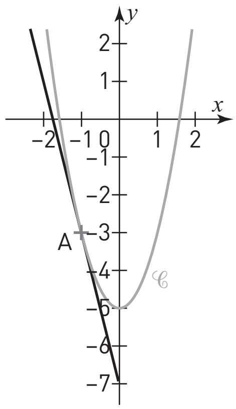
2. Ces résultats correspondent aux coefficients directeurs des sécantes à la courbe de la fonction carrée aux points A et M d'abscisses respectives 3 et $3 + h$ où h varie de 1 à 0,00001. Ces coefficients directeurs se rapprochent de 6 qui est le coefficient directeur de la tangente en A.

3. $f'(2) = -0{,}5$

61. 1. $\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \dfrac{-4h+2h^2}{h} = -4 + 2h$

Donc $f'(-1) = -4$.

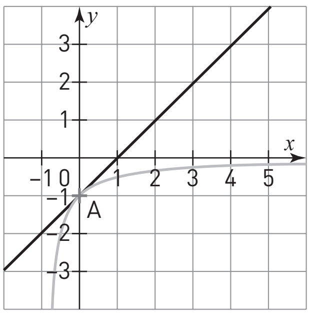
2.



62. 1. $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\dfrac{-\frac{1}{1+h}+1}{h}=\dfrac{\frac{-1+1+h}{1+h}}{h}=\dfrac{1}{1+h}$

Donc $f'(0) = 1$.

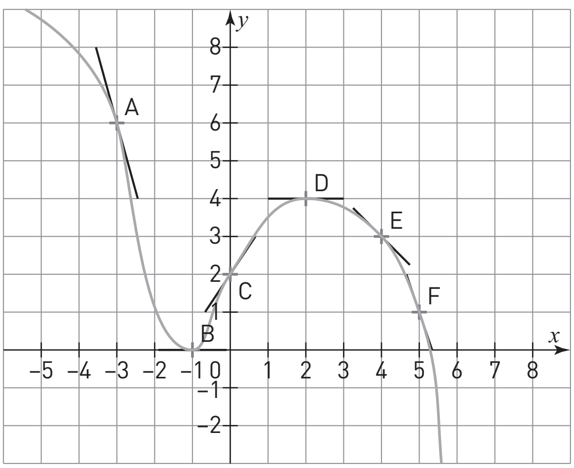
2.



63. 1. à **4.** Voir Geogebra

5. $f'(-2) \approx -0{,}3$; $f'(-1) \approx -0{,}89$; $f'(0) = -4$; $f'(1) = 0$; $f'(2) = 4$

64. 1., **2.** et **3.**



65. 1. $f'(-2) = 0$; $T_A : y = 4$

2. $T_B : y = -4x + 20$

66. Avec la courbe $\mathscr{C}'$ on observe que $f'(2)$ semble être égal à 1, donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 2 doit être environ égal à 1.

67. $f'(1)(x-1) + f(1) = -7x + 9$

Donc $f'(1) = -7$ et $f(1) = 2$.

68. 1. $f'(x) = 4x^3 + 6x$

2. $f'(-1) = -10$; $f'(0) = 0$; $f'(1) = 10$

3.

```
a=float(input("a=?"))
b=float(input("b=?"))
p=float(input("p=?"))
x=a
L=[]
while x<=b:
    L.append(4*x**3+6*x)
    x=x+p
```

On peut rajouter `print(L)` pour afficher les résultats.

Fonction dérivée

69. • $k = \dfrac{1}{9}$

$u(x) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 1$.

Donc $f = ku$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \dfrac{1}{9}$

• $k = \dfrac{3}{8}$

$u(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x$.

Donc $g = ku$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) = \dfrac{3}{4}x$

• $k = \dfrac{-1}{44}$

$u(x) = x^4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 4x^3$.

Donc $h = ku$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$h'(x) = -\dfrac{1}{11}x^3$

• $k = 9$

$u(x) = x^{-2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $u'(x) = -2x^{-3}$.

Donc $i = ku$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$i'(x) = -18x^{-2} = -\dfrac{18}{x^2}$

• $k = -\dfrac{11}{3}$

$u(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

$l = ku$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$l'(x) = \dfrac{11}{3x^2}$

• $k = \dfrac{1}{5}$

$u(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$j = ku$ est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$.

$j'(x) = \dfrac{1}{10\sqrt{x}}$

70. a) $f'(x) = \dfrac{3x^3}{2} - 5x^2 + 2$

b) $g'(x) = \dfrac{2x+1}{6}$

c) $h'(x) = \dfrac{1}{2}$

71. a) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$f'(x) = -\dfrac{5}{2x^2} - \dfrac{7x}{2}$.

b) g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g'(x) = -\dfrac{44}{5x^2}$.

c) h est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et

$h'(x) = \dfrac{7(-5x^2 + 30x - 23)}{(21-7x)^2}$.

d) j est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$j'(x) = \dfrac{30x}{(3x^2+2)^2}$.

e) k est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\ ;5\}$

et $k'(x) = \dfrac{-9(x^2-5)}{(x^2-6x+5)^2}$.

f) m est dérivable sur $]-\infty\ ;10[$ et $m'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{10-x}}$.

72. 1. Si $h > 0$: $\dfrac{|0+h|-|0|}{h} = \dfrac{|h|}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$.

2. Si $h < 0$: $\dfrac{|0+h|-|0|}{h} = \dfrac{|h|}{h} = \dfrac{-h}{h} = -1$.

3. Le taux de variation de la fonction f entre 0 et $0 + h$ ne tend pas vers un nombre **unique** lorsque h tend vers 0. Donc f n'est pas dérivable en 0.

73. a) $f'(x) = 6x^2\,(5-7x)^2 - 14(5-7x)2x^3$

$f'(x) = 2x^2\,(5-7x)(3(5-7x) - 14x)$

$f'(x) = 2x^2(5-7x)(15-35x)$

b) $f(x) = 2x^3\,(25 - 70x + 49x^2)$

$f(x) = 50x^3 - 140x^4 + 98x^5$

Donc $f'(x) = 490x^4 - 560x^3 + 150x^2$.

74. a) $f''(x) = 12x - 14$

b) $f''(x) = \dfrac{-10}{(-5x+7)^3}$

75. 1. f est de la forme ku avec $k = \dfrac{1}{3}$ et $u = |x|$.

Or la fonction u est dérivable sur $]-\infty\ ;0[$, donc

f est dérivable sur $]-\infty\ ;0[$.

2. Sur $]-\infty\ ;0[$, $f'(x) = \dfrac{x}{3}$.

3. Sur $]0\ ;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-x}{3}$.

76. 1. $f(x) = 3x^2 + 7x + c$ **2.** $c = -4$

77. 1. $C_m(10) = 0{,}95$, soit 950 €.

$C_m(11) = 1{,}05$, soit 1 050 €.

2. a) La fonction C est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme du second degré, donc elle est dérivable sur $[1\ ;20]$. $C'(x) = 0{,}1x - 0{,}1$

b) $C'(10) = 0{,}9$; $C'(11) = 1$

c) Les résultats sont assez proches.

78. 1. $C(0{,}5) = 0{,}75$ g/L

2. a) La fonction C est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme du second degré. Donc elle est dérivable sur $[0\ ;1]$. $C'(t) = -2t + 2$

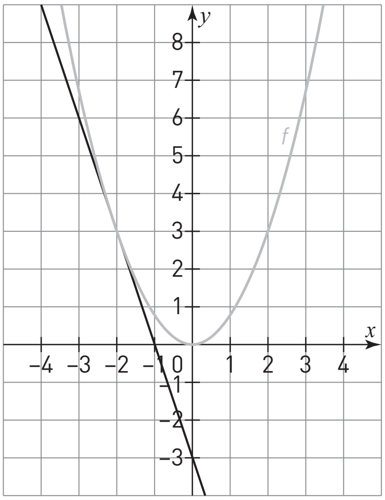
b) $C'(0,5) = 1$; $C'(1) = 0$

3. La vitesse semble maximale au départ lorsque $x = 0$ car la tangente à la courbe semble avoir le plus grand coefficient directeur.

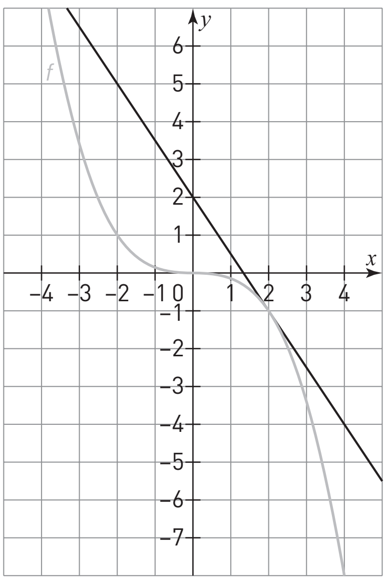
(On peut dire aussi : la fonction $C'(t)$ est une fonction affine décroissante donc son maximum sur l'intervalle [0 ; 1] est en $x = 0$.)

Équations de tangente

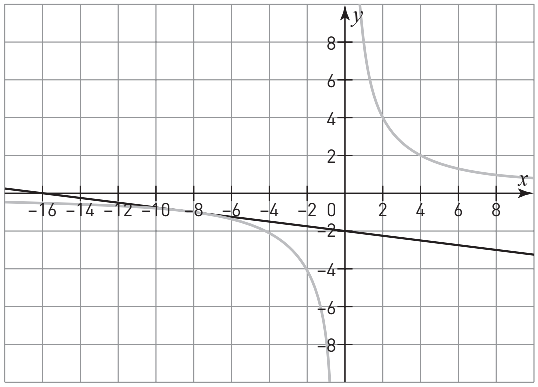
79. $y = -3x - 3$



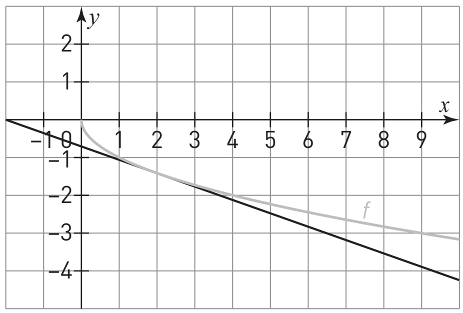
80. $y = -\frac{3}{2}x + 2$



81. $y = -\frac{1}{8}x - 2$



82. $y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$



83. $f'(3)$ est égal au coefficient directeur de la droite (AJ) donc $f'(3) = \frac{-2}{3}$.

$f(3) = y_A = -1$. Donc T a pour équation :

$y = -\frac{2}{3}(x - 3) - 1 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + 1$.

(On peut dire aussi directement que son ordonnée à l'origine est 1 car elle passe par J.)

84. 1. a semble être égal à -3.

2. $f'(x) = 2 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x = 2 \Leftrightarrow x = -3$

85. $f'(x) = -1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$

Ce trinôme a deux solutions : $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{1}{3}$. Donc $\mathscr{C}_f$ admet deux tangentes de coefficient directeur -1, respectivement aux points A(1 ; 0) et B$\left(\frac{1}{3} ; \frac{22}{27}\right)$.

86. 1. $y = f'(a)(x + a) + f(a)$

$y = (2a + 5)(x - a) + a^2 + 5a - 4$

$y = (2a + 5)x - 2a^2 - 5a + a^2 + 5a - 4$

$y = (2a + 5)x - a^2 - 4$

2. Les coordonnées doivent vérifier l'équation de la tangente :

$-7 = (2a + 5) \times 1 - a^2 - 4$

$\Leftrightarrow a^2 - 2a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = -2$ ou $a = 4$

Les deux tangentes ont donc pour équation $y = x - 8$ et $y = 13x - 20$.

Approximation affine

87. 1. $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h} \approx f'(a)$

$\Leftrightarrow f(a + h) \approx f'(a) \times h + f(a)$

2. a) $f(1) = 1^2 = 1$ et $f'(1) = 2 \times 1 = 2$.

Or $f(1 + h) \approx f'(1) \times h + f(1)$.

Donc $(1 + h)^2 \approx 2h + 1$.

b) $(1 + 0{,}005)^2 \approx 1 + 2 \times 0{,}005$

Donc $1{,}005^2 \approx 1{,}01$.

$(1 - 0{,}001)^2 \approx 1 + 2 \times -0{,}001$

Donc $0{,}999^2 \approx 0{,}998$.

c) $1{,}005^2 = 1{,}010025$ et $0{,}999^2 = 0{,}998001$.

3. a) $g(1) = \sqrt{1} = 1$ et $g'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$.

Or $g(1 + h) \approx g'(1) \times h + g(1)$.

Donc $\sqrt{1+h} \approx \dfrac{1}{2}h + 1$.

b) $\sqrt{1+0{,}002} \approx 1 + \dfrac{0{,}002}{2}$

Donc $\sqrt{1{,}002} \approx 1{,}001$.

$\sqrt{(1-0{,}006)} \approx 1 - \dfrac{0{,}006}{2}$

Donc $\sqrt{0{,}994} \approx 0{,}997$.

c) Avec la calculatrice : $\sqrt{1{,}002} = 1{,}0009995$ et $\sqrt{0{,}994} \approx 0{,}9969954864$.

4. a) $i(1) = 1$ et $i'(1) = -1$.

Or $i(1 + h) \approx i'(1) \times h + i(1)$.

Donc $\dfrac{1}{1+h} \approx -h + 1$.

b) $\dfrac{1}{1-0{,}009} \approx 0{,}009 + 1$

Donc $\dfrac{1}{0{,}991} \approx 1{,}009$.

$\dfrac{1}{1+0{,}007} \approx 1 - 0{,}007$

Donc $\dfrac{1}{1{,}007} \approx 0{,}993$.

c) Avec la calculatrice : $\dfrac{1}{0{,}991} \approx 1{,}009081736$ et $\dfrac{1}{1{,}007} \approx 0{,}9930486594$.

Nombre dérivé et paramètres

88. 1. $A(6 ; -1) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow f(6) = -1 \Leftrightarrow 36a + 6b + 5 = -1$
$\Leftrightarrow 36a + 6b = -6 \Leftrightarrow 6a + b = -1$

Pour tout réel x, $f' = (x) = 2ax + b$.

$f'(6) = 2 \Leftrightarrow 12a + b = 2$

2. En résolvant le système on obtient :

$a = 005$ et $b = -4$. Donc $f(x) = 0{,}5x^2 - 4x + 5$.

89. 1. $g'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

C'est un trinôme qui s'annule en 1 et en $\dfrac{1}{3}$.

Donc C_g a deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses, une au point d'abscisse 1 et une autre au point d'abscisse $\dfrac{1}{3}$.

2. $g'(x) = 3mx^2 - 4x + 1$

L'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution si et seulement si $\Delta = 0$.

Or $\Delta = 16 - 12m$.

Donc $= 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{4}{3}$.

Donc si $m = \dfrac{4}{3}$, alors la courbe $\mathscr{C}_g$ admet une unique tangente « horizontale ».

90. 1. Voir GeoGebra.

2. k existe s'il existe un réel a tel que $-\dfrac{k}{a^2} = -\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}a + \dfrac{k}{a} = 3$, c'est-à-dire : $k = \dfrac{a^2}{2}$ et, en remplaçant dans la deuxième équation, $\dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2} = 3$. On en déduit que $a = 3$. Et par conséquent $k = \dfrac{9}{2}$.

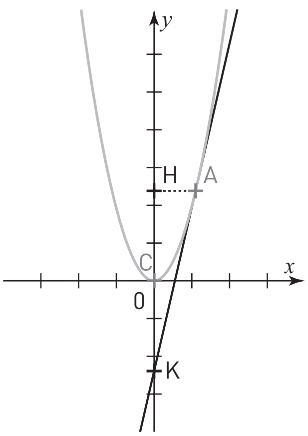
Travailler autrement

91. 1. Le mot *ultime* correspond à la notion de « limite » qui n'existait pas encore à l'époque. Les « deux accroissements » correspondent aux différences $f(a + h) - f(a)$ et $a + h - a$. Le mot *évanescent* signifie « qui s'amoindrit et disparaît graduellement » ; on dirait aujourd'hui que ces « deux accroissements » tendent vers zéro.

D'Alembert, en utilisant les travaux de Newton et de Leibniz, a donné une définition très proche de celle qu'on connaît actuellement.

2. *Touchante* signifie « tangente ». Le « marquis de l'Hospital » a aussi travaillé sur la notion de tangente, ainsi que les mathématiciens précédemment nommés.

92.



Démonstration : voir l'exercice 110 p. 137 du manuel.

93. 1. $f(x) = 2x - 12$;

$g(x) = x^2 - 4x - 3$;

$h(x) = -x^2 + 8x - 21$;

$i(x) = \dfrac{-18}{x}$

Ces quatre courbes ont un point commun d'abscisse 3 et en ce point leur tangente est commune.

2. La réponse dépend des élèves.

Exercices bilan p. 135

94. Dérivabilité

1. a) $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{(5-2h)^2 - 5^2}{h} = 4h - 20$

b) f est dérivable en 2 et $f'(2) = -20$.

2. a) f est la composée d'une fonction affine dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de la fonction carré dérivable sur $\mathbb{R}$, par conséquent elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout réel x, $f'(x) = -4(-2x + 9)$.

Donc $f'(2) = -4 \times 5 = -20$.

95. Fonctions dérivées

• m est dérivable sur $I = \mathbb{R}$.

$m'(x) = -\dfrac{2}{3}x^2 + 8x$

• n est dérivable sur $I = \mathbb{R}$.

$n'(x) = -56x - \dfrac{7}{2}$

• j est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$j'(x) = -\dfrac{1}{x^6}$

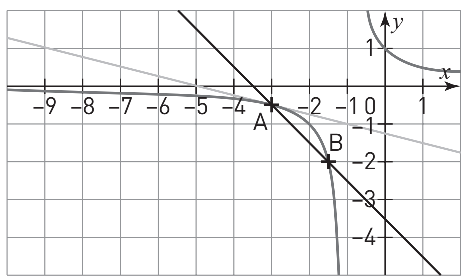
• p est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

$p'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{4x+3}}$

96. Sécante et tangente

1. $\dfrac{g(-1{,}5) - g(-3)}{-1{,}5 + 3} = \dfrac{-2 + 0{,}5}{1{,}5} = -1$

2. et **4.**



3. Pour tout réel x de I, $g'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Donc $g'(-3) = -\dfrac{1}{4}$.

97. Tangentes et nombres dérivés

1. $f'(0) = 2$; $f'(1) = -3$; $f'(3) = 5$

2. $y = 5x - 18$

3. $f'(x) = 3x^2 - 8x + 2$

Donc $f'(0) = 2$.

$f'(1) = 3 \times 1^2 - 8 \times 1 + 2 = -3$

$f'(3) = 3 \times 3^2 - 8 \times 3 + 2 = 5$

98. Approximation affine d'une fonction au voisinage de a

$f(a + h) \approx hf'(a) + f(a)$

• Avec $f(x) = x^2$ et $a = 3$ on obtient :

$(3 + h)^2 \approx 6h + 9$

Donc $3{,}0014^2 \approx 6 \times 0{,}0014 + 9 \approx 9{,}0084$.

• Avec $f(x) = \frac{1}{x}$ et $a = -2$ on obtient :

$\frac{1}{(-2+h)} \approx -\frac{1}{4}h - \frac{1}{2}$.

Donc $\frac{1}{-1{,}999} \approx -\frac{0{,}001}{4} - 0{,}5 \approx -0{,}50025$.

• Avec $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 1$ on obtient :

$\sqrt{1+h} \approx \frac{h}{2} + 1$.

Donc $\sqrt{0{,}9955} \approx \frac{-0{,}0045}{2} + 1 \approx 0{,}99775$.

99. Tangentes et parabole

1. Voir le graphique suivant.

2. Soit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$.

Donc, pour tout réel x, $f'(x) = -x + 1$.

L'équation de la tangente en 0 est :

$y = x - 1$.

3. $f'(x) = \frac{7}{2} \Leftrightarrow -x + 1 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$

4. $y = (-a + 1)(x - a) - \frac{a^2}{2} + a - 1$

$y = (-a + 1)x + \frac{a^2}{2} - 1$

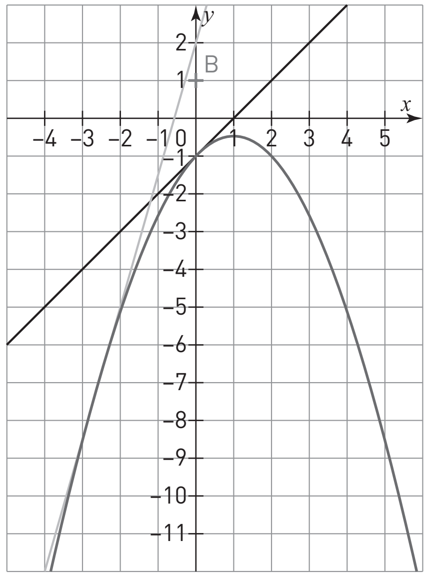
Les coordonnées de B(0 ; 1) vérifient l'équation, donc $\frac{a^2}{2} - 1 = 1$, c'est-à-dire $a = 2$ ou $a = -2$.

L'équation de la tangente en -2 est :

$y = 3x + 1$.

L'équation de la tangente en 2 est :

$y = -x + 1$.



100. Déterminer une fonction

1. $f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$

2. Le point A est sur la tangente alors :

$y_A = 3 \times -2 - 5 = 1$. Donc A(−2 ; 1).

3. On sait que $A \in \mathscr{C}_f$ alors $f(-2) = 1$, c'est-à-dire $4a - 2b = 1$.

D'autre part, $f'(-2) = 3$ car le coefficient directeur de la tangente en A est égal à 3. Or, pour tout réel x, $f'(x) = 2ax + b$. Donc, on a $-4a + b = 3$.

En résolvant le système $\begin{cases} 4a - 2b = 1 \\ -4a + b = 3 \end{cases}$,

on trouve $b = -4$ et $a = -\frac{7}{4}$.

101. Tangentes parallèles et points symétriques

Pour tout réel x, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Donc $f'(a) = f'(-a) = -\frac{1}{a^2}$.

Les tangentes en a et en $-a$ sont donc parallèles. Leurs équations sont de la forme :

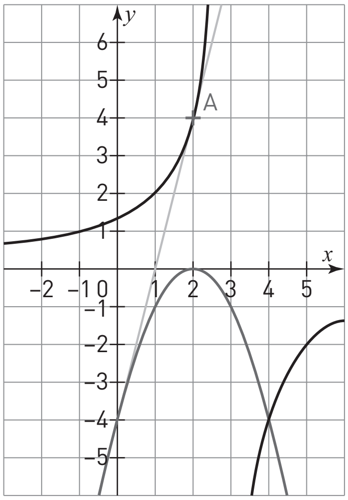
$T_a : y = -\frac{1}{a^2}(x - a) + \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$

$T_a : y = -\frac{1}{a^2}(x + a) - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}x - \frac{2}{a}$

Donc leurs ordonnées à l'origine sont opposées.

102. Tangente commune

A. 1. à **3.**



On trouve $a = 2$ et $b = 0$.

B. 1. $y = \dfrac{4}{(3-a)^2}(x-a) + \dfrac{4}{3-a}$

$y = \dfrac{4}{(3-a)^2}x + \dfrac{12-8a}{(3-a)^2}$

Avec $a = 2$, on obtient $y = 4x - 4$.

2. Avec $b = 0$, on a $y = g'(0) \times x + g(0)$.

Or, pour tout réel x, $g'(x) = -2x + 4$ et $g(0) = -4$.

On a donc $y = 4x - 4$.

3. La droite d'équation $y = 4x - 4$ est une tangente commune à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercices d'approfondissement

p. 136-137

103. Dérivabilité

1. $f(-7+h) = |-10+h| = 10 - h$ car h étant compris entre -1 et 1, $-10 + h$ est négatif.

$$\frac{f(-7+h) - f(-7)}{h} = \frac{10 - h - 10}{h} = -1$$

2. Donc f est dérivable en -7 et $f'(-7) = -1$.

3. f est la composée de u suivie de v, avec u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x - 3$ et $v(X) = |X|$.

On sait que la fonction v n'est pas dérivable en 0. Or $X = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Donc, lorsque $x = 3$, la fonction f composée de u suivie de v n'est pas dérivable.

104. Dérivée de la fonction cube

1. $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2)$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

2. a) $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \dfrac{3x_0^2h + 3x_0h^2}{h}$

$= \dfrac{3x_0h(x_0+h)}{h} = 3x_0(x_0+h)$

Lorsque h tend vers 0, $3x_0(x_0+h)$ tend vers $3x_0^{\,2}$. Donc $f'(x_0) = 3x_0^{\,2}$.

b) x_0 est un réel quelconque. Donc, quel que soit le réel x, $f'(x) = 3x^2$.

105. Dérivée de $\frac{1}{v}$ et de $\frac{u}{v}$

1.

$$\frac{\frac{1}{v}(a+h) - \frac{1}{v}(a)}{h} = \frac{1}{h} \times \left(\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}\right)$$

$$= \frac{1}{h} \times \frac{v(a) - v(a+h)}{v(a)v(a+h)} = -\frac{v(a+h) - v(a)}{hv(a)v(a+h)}$$

$$= -\frac{v(a+h) - v(a)}{h} \times \frac{1}{v(a)v(a+h)}.$$

2. Lorsque h tend vers 0, $\dfrac{v(a+h) - v(a)}{h}$ tend vers $v'(a)$ par définition du nombre dérivé, et $\dfrac{1}{v(a)v(a+h)}$ tend vers $\dfrac{1}{v^2(a)}$.

Donc $-\dfrac{v(a+h) - v(a)}{h} \times \dfrac{1}{v(a)v(a+h)}$ tend vers $-\dfrac{v'(a)}{v^2(a)}$.

Donc $\left(\dfrac{1}{v}\right)'(a) = -\dfrac{v'(a)}{v^2(a)}$.

3. Pour tout réel a de I on a :

$\dfrac{u}{v}(a) = \dfrac{u(a)}{v(a)} = u(a)\dfrac{1}{v(a)} = u(a)\dfrac{1}{v}(a)$.

On en déduit, d'après le théorème de dérivation d'un produit de fonctions :

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'(a) = u'(a)\dfrac{1}{v}(a) + \left(\dfrac{1}{v}\right)'(a)u(a)$.

D'après la question précédente, on a donc :

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(a) = u'(a)\frac{1}{v(a)} - \frac{v'(a)}{v^2(a)}u(a)$$
$$= \frac{u'(a)}{v(a)} - \frac{v'(a)u(a)}{v^2(a)}$$
$$= \frac{u'(a)v(a) - v'(a)u(a)}{v^2(a)}$$

106. Déterminer une fonction

f est dérivable sur $]3 ; +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{-b}{(x-3)^2}$.

Or, d'après l'énoncé, $f'(5) = \dfrac{1}{2}$.

Donc $\dfrac{-b}{(5-3)^2} = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $b = -2$.

D'autre part, $M(5 ; -1) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow f(5) = -1$.

Donc $a + \dfrac{b}{2} = -1$ et $a = 0$.

107. Courbes tangentes

1. $x^2 + x + \dfrac{1}{4} - \dfrac{5x+4}{4x}$

$$= \frac{4x^3}{4x} + \frac{4x^2}{4x} + \frac{x}{4x} - \frac{5x+4}{4x}$$
$$= \frac{4x^3 + 4x^2 - 4x - 4}{4x}$$
$$= \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x}$$

Or $(x-1)(x+1)^2 = x^3 + x^2 - x - 1$.

Donc $g(x) - f(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)^2}{x}$.

2. $g(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.

Par conséquent, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent en $x = 1$ et en $x = -1$.

Étudions le signe de $g(x) - f(x)$ sur $\mathbb{R}^*$:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$-$		$+$	
$g(x) - f(x)$		$+$	0	$+$	‖	$+$	0	$+$	

Donc $g(x) - f(x) \geqslant 0$ sur $]-\infty ; 0[\cup [1 ; +\infty[$.

Ce qui signifie que $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur $]-\infty ; 0[\cup [1 ; +\infty[$ et $\mathscr{C}_g$ est en dessous de $\mathscr{C}_f$ sur $]0 ; 1]$.

3. Pour tout réel x non nul, $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.

Donc $f'(-1) = -1$ et $g'(x) = 2x + 1$. Donc $g'(-1) = -1$.

D'autre part, $f(-1) = g(-1)$.

Donc, au point A d'abscisse -1, la tangente à $\mathscr{C}_f$ est confondue avec la tangente à $\mathscr{C}_g$.

108. Approximation du carré

1. $y = 2a(x-a) + a^2 \Leftrightarrow y = 2ax - a^2$

2. $M \in \Delta \Leftrightarrow y_M = 2a(a+h) - a^2 = 2ah + a^2$

3. $M \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow y_B = (a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$

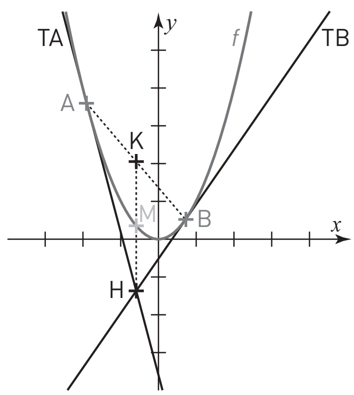
4. $BM = |y_M - y_B| = h^2$

5. La marge d'erreur correspond à l'écart entre $f(x)$ et $f'(a)(x-a) + f(a)$ lorsque x est proche de a, c'est-à-dire l'écart entre $\mathscr{C}_f$ et Δ au voisinage du point de tangence. Cela correspond donc à la distance BM.

Donc, lorsqu'on utilise l'approximation affine de f en $x = a + h$, on obtient une valeur approchée de $f(a+h)$ à h^2 près.

109. Tangentes et parabole

1.



2. Conjecture : « Le point M est situé sur la parabole. »

3. Les points A et B appartiennent à la parabole, alors $A(a ; a^2)$ et $B(b ; b^2)$ où a et b sont des réels.
Le point K est le milieu de [AB], donc

$K\left(\dfrac{a+b}{2} ; \dfrac{a^2+b^2}{2}\right)$.

Les tangentes T_A et T_B ont pour équations respectives $y = 2ax - a^2$ et $y = 2bx - b^2$.

L'abscisse du point d'intersection H de T_A et T_B est donc la solution de l'équation :

$2ax - a^2 = 2bx - b^2$

$(2a - 2b)x = a^2 - b^2$

$x = \dfrac{a^2 - b^2}{2(a-b)} = \dfrac{a+b}{2}$. Donc $x_H = \dfrac{a+b}{2}$.

Comme H ∈ T_A, alors $y_H = 2a\left(\dfrac{a+b}{2}\right) - a^2$.

Soit $y_H = ab$.

M étant le milieu de [KH] on en déduit que

$x_M = \dfrac{a+b}{2}$ et $y_M = \dfrac{\dfrac{a^2+b^2}{2} + ab}{2} = \dfrac{(a+b)^2}{4}$.

Donc on a bien $y_M = {x_M}^2$, ce qui signifie que le point M appartient à la parabole.

4. Pour tracer la tangente en A, on place un point B sur la parabole puis, à l'aide du compas, on place le milieu K de [AB]. On place ensuite le point M sur la parabole à la même abscisse que K, puis à l'aide du compas on place le point H symétrique de K par rapport à M. La droite (AH) est tangente en A à la parabole.

5. Conjecture : « La tangente à la parabole au point M est parallèle à la droite (AB). »

En effet, le coefficient directeur de la tangente en M est égal à $f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = a + b$.

Et le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{b^2 - a^2}{b - a} = \dfrac{(b-a)(b+a)}{b-a} = a + b$.

110. Méthode de Toricelli

1. Voir GeoGebra.

2. Sachant que, pour tout réel a et pour tout entier naturel non nul n, $f'(x) = nkx^{n-1}$, alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A d'abscisse a a pour coefficient directeur nka_{n-1}.

D'autre part, si $a \neq 0$, la droite (AH′) a pour coefficient directeur $m = \dfrac{y_A - y_{H'}}{x_A - x_{H'}}$.

Or $x_{H'} = x_H = 0$.

Et $y_{H'} = -(n-1)y_H = -(n-1)y_A$

$\Leftrightarrow y_{H'} = -(n-1)ka^n$.

Donc $m = \dfrac{ka^n + (n-1)ka^n}{a} = \dfrac{nka^n}{a} = nka^{n-1}$.

Ces deux droites sont donc parallèles et passent par A, il s'agit donc de la même droite.

3. Oui, la démonstration précédente reste vraie sur $\mathbb{R}^*-$.

111. Trouver *f* connaissant *f*′

1. a) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

b) $a = 2$; $b = -2,5$ et $c = 1$.

2. a) $g'(x) = 2ax + b$

b) $a = -2$ et $b = 0,5$.

c) $g(x) = -2x^2 + 0,5x + c$

$g(2) = -9 \Leftrightarrow -7 + c = -9 \Leftrightarrow c = -2$

112. Vitesse moyenne, vitesse instantanée

1. $x(0) = 2$

2. $x(6) = 20$

3. $\dfrac{x(6) - x(0)}{6} = 3$

Sa vitesse moyenne est donc de 3 cm·s^{-1}.

4. $v(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x(t+h) - x(t)}{h}$

Donc $v(t) = x'(t)$.

Donc $v(t) = t^2 - 6t + 9$.

Donc $v(4) = 1$.

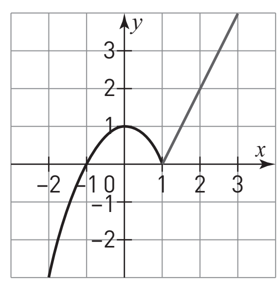
Sa vitesse instantanée à l'instant $t = 4$ est égale à 1 cm·s^{-1}.

5. $v(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 9 = 0 \Leftrightarrow (t-3)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 3$

Donc le mobile était à l'arrêt à l'instant $t = 3$.

Vers la Tle

113. 1.



2. Sur]–∞ ; 1[, la fonction f est une fonction polynôme du second degré dérivable en tout réel.

Et, sur [1 ; +∞[, la fonction f est une fonction affine dérivable en tout réel.

Donc, sur chacun de ces intervalles, la fonction f est dérivable.

3. a) $f(1) = 2 \times 1 - 2 = 0$

b) Si $h > 0$ alors $1 + h > 1$,
donc $f(1 + h) = 2(1 + h) - 2 = 2h$.

Donc $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{2h}{h} = 2$

et $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$.

c) Si $h < 0$, alors $1 + h < 1$,
donc $f(1 + h) = -(1 + h)^2 + 1 = -2h - h^2$.

Donc $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{-2h-h^2}{h} = -2-h$

et $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = -2$.

d) Lorsque h tend vers 0, le taux de variation $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ ne tend pas vers une valeur réelle unique, donc la fonction f n'est pas dérivable en 1.

114. 1. $F'(x) = 3x^2 + 2x - 4 = f(x)$

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. $G'(x) = ax^2 + bx + c = g(x)$

Donc G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

3. $H(x) = -\dfrac{5}{3}x^3 + 8x - 10x$

Travaux pratiques p. 138-139

TP 1. Construction de la courbe de la « chute libre »

- **Durée estimée :** 60 min
- **Objectif :** Tracer la courbe de la « chute libre » avec la méthode d'Euler en utilisant un algorithme, puis un tableur.

A. 1. Ce quotient représente la vitesse moyenne de la vis entre les instants t et $t + h$.

2. $v(t)$ est égale au taux de variation de la fonction d entre t et $t + h$ lorsque h tend vers 0.

$v(t)$ est donc égale au nombre dérivé de la fonction d en t, noté $d'(t)$.

3. D'après le cours, il s'agit de l'approximation affine de la fonction d en $t + h$.

B. 1. a) Il s'agit de l'approximation affine de d avec $t = 0$ et $h = 0{,}01$.

b) $d(0{,}01) \approx 0{,}01 \times 9{,}81 \times 0 + 0$

Donc $d(0{,}01) \approx 0$.

2. a) Il s'agit de l'approximation affine de d avec $t = 0{,}01$ et $h = 0{,}01$.

b) $d(0{,}02) \approx 0{,}01 \times 9{,}81 \times 0{,}01 + 0$

Donc $d(0{,}02) \approx 0{,}000981$.

3. $d(0{,}03) \approx 0{,}002943$

$d(0{,}04) \approx 0{,}005886$

4.

```
d←0
h←0,01
Pour t variant de 0 à 0,1 avec un pas de h
    d←h×9,81×t+d
    Afficher d
Fin pour
```

C. 1. Voir la feuille de calcul.

2. En A3 ↦ `=A2+0,01`

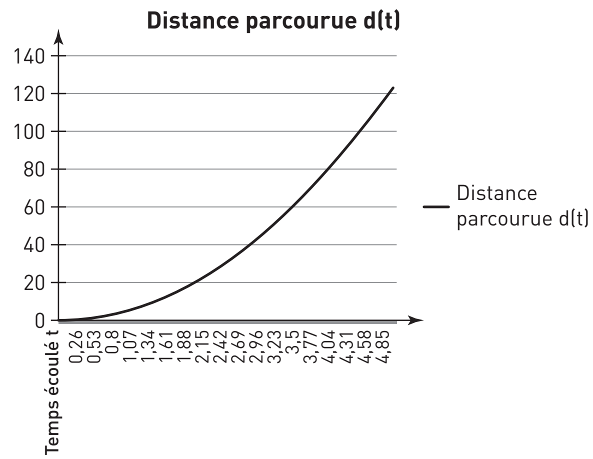
3. En B3 ↦ `=A3*9,81`

4. C3 correspond à $d(0{,}01)$, B2 correspond à $v(0)$ et C2 correspond à $d(0)$. Donc la formule indiquée correspond à la question **B. 1. a)**.

5. Voir la feuille de calcul.

6. Entre 4,04 s et 4,05 s la vis aura parcouru 80 m, elle aura donc rejoint le sol.

7. C'est la courbe représentative de la fonction d.



TP 2. Coût total, coût marginal, coût moyen

- **Durée estimée :** 60 min
- **Objectifs :** Découvrir les notions économiques de coût total, coût moyen, et coût marginal.

Justifier l'approximation du coût marginal par la dérivée du coût total.

1. $C_M(x) = \dfrac{1}{100\,000}x^2 - \dfrac{5}{100}x + 100 + \dfrac{10\,000}{x}$

2. $C_M(100) = 195{,}1$

$C_M(1\,000) = 70$

Le coût moyen d'un kg de nougat est beaucoup plus bas pour une grosse production de 1 000 kg que pour une production de 100 kg.

B. 1. a) $C_m(100) = C_T(101) - C_T(100) = 90$

$C_m(1\,000) = 30$

L'augmentation de la production est intéressante dans les deux cas car le coût marginal est inférieur au coût moyen.

b) Par définition du taux de variation de C_T entre x et $x + 1$.

2. a) Si x est un grand nombre alors $x + 1$ est proche de x, donc le taux de variation de C_T entre x et $x + 1$ est proche du nombre dérivé de C_T en x.

b) La fonction C_T est un polynôme de degré 3, donc elle est derivable sur $\mathbb{R}$.

$C_T'(x) = \dfrac{3}{100\,000}x^2 - \dfrac{1}{10}x + 100$

3. a) et **b)** Voir la feuille de calcul.

c) En C2 ↦ `=B3—B2`

d) En D2 ↦ `=3/10000*A2^2—1/10 * A2+100`

e) En effet les valeurs du tableau dans les colonnes C et D sont très voisines, la dérivée du coût total donne donc une bonne approximation du coût marginal.

En autonomie p. 140-141

Calculer un nombre dérivé

115. a **116.** d

117. c **118.** d

119. 1. $\dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \dfrac{1 - 4h + h^2 - 1}{h} = -4 + h$

Donc $f'(-2) = -4$.

2. Pour tout réel x, $f'(x) = 2x$.

Donc $f'(5) = 10$.

120. $f'(-3) = 4$; $f'(0) = 0$; $f'(4) = \dfrac{2}{3}$

121. 1. $V_m = \dfrac{8}{0{,}4} = 20$ km/h (24 min = 0,4 h)

2. $d'(10) = \dfrac{5 \text{ km}}{12 \text{ min}}$ (coefficient directeur de D_1) ; c'est-à-dire $v_i(10) = \dfrac{5}{0{,}2} = 25$ km/h.

$d'(22) = \dfrac{4 \text{ km}}{6 \text{ min}}$ (coefficient directeur de D_2) ; c'est-à-dire $v_i(22) = \dfrac{4}{0{,}1} = 40$ km/h.

3. Entre 14 et 16 min.

4. Elle a accéléré car les tangentes successives à la courbe, entre le point d'abscisse 20 et le point d'abscisse 22, ont des coefficients directeurs de plus en plus grands.

Déterminer l'équation d'une tangente

122. b **123.** a **124.** b

125. L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est $y = 4x - 4$.

126. L'équation de la tangente au point d'abscisse −3 est $y = -6x - 9$.

Par lecture graphique, la droite D passe par les points (−1 ; −3) et (−2 ; 3). On peut donc calculer son coefficient directeur, on trouve $m = -6$, puis on en déduit l'ordonnée à l'origine $p = -9$.

On retrouve ainsi l'équation de la tangente, donc D est la tangente au point d'abscisse −3.

127. 1. L'équation de Δ est $y = -\dfrac{1}{a^2}(x - a) + \dfrac{1}{a}$, c'est-à-dire $y = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}$.

2. Avec l'axe des ordonnées : $M\left(0 ; \dfrac{2}{a}\right)$.

Avec l'axe des abscisses : $N(2a ; 0)$.

3. Le milieu de [MN] a pour coordonnées $\left(\frac{0+2a}{2};\frac{\frac{2}{a}+0}{2}\right)$, c'est-à-dire $\left(a\ ;\frac{1}{a}\right)$, ce qui correspond aux coordonnées du point A.

Déterminer des fonctions dérivées

128. c **129. b** **130. a**

131. h est la composée de la fonction $x \mapsto -3x+9$ dérivable sur $\mathbb{R}$, suivie de la fonction $X \mapsto X^4$ dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = -12(-3x+9)^3$.

132. a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 15x^2 + 4x - 8$.

b) g est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et

$g'(x) = -\sqrt{x} + \frac{4-x}{2\sqrt{x}} = \frac{-3x+4}{2\sqrt{x}}$.

c) h est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{9\}$ et $h'(x) = \frac{3x^2-54x}{(x-9)^2}$.

d) j est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $j'(x) = \frac{-200x+400}{(x^2-4x+7)^2}$.

133. L'équation est de la forme :

$y = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Or $f'(x) = 3x^2 + 8x - 6$.

Donc $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-37}{4}$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{39}{8}$.

Donc l'équation de la tangente en $-\frac{1}{2}$ est :

$y = -\frac{37}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right) + \frac{39}{8}$, c'est-à-dire $y = -\frac{37}{4}x + \frac{1}{4}$.

134. $C(10) = 6 \Leftrightarrow 100a + 10b = 6$ et

$C'(10) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 20a + b = \frac{1}{2}$.

Résolvons le système : $\begin{cases} 100a + 10b = 6 \\ 20a + b = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Par substitution ou combinaison linéaire, on trouve $b = \frac{7}{10}$ et $a = -\frac{1}{100}$.

CHAPITRE 5 Variations et courbes représentatives de fonctions

Manuel p. 142-167

I. Introduction

Objectifs du chapitre

L'objectif de ce chapitre est de comprendre et maîtriser les applications de la dérivation pour l'étude des variations d'une fonction et la résolution de problèmes d'optimisation.

C'est pourquoi les activités d'introduction traitent d'abord du lien entre la dérivée et la fonction (lien qui sera ensuite démontré dans le cours) et présentent ensuite un problème classique d'optimisation de surface.

Un autre objectif du chapitre est d'étudier la position relative d'une courbe de fonction par rapport à sa tangente en un point, ainsi que de deux courbes entre elles.

Des problèmes avec des approches différentes (économique ou physique) permettent de varier les situations concrètes pour satisfaire tous les profils d'élèves.

Capacités

- → **Étudier les variations d'une fonction, faire le lien entre une fonction et sa dérivée.**
- → **Résoudre un problème d'optimisation, rechercher un extremum.**
- → **Étudier la position relative de deux courbes.**
- → **Résoudre des inéquations.**

II. Corrigés des activités et exercices

Pour prendre un bon départ p. 143

1. Étudier le signe

a)

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		$+\infty$
$B(x)$		$-$	

c)

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$16-8x$		$+$		$+$	0	$-$	
$C(x)$		$-$	0	$+$		$-$	

d)

x	$-\infty$		-9		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$-x-\frac{1}{4}$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+9$		$-$	0	$+$		$+$	
$D(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

e)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{6}$		0		1		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$6x^2-5x-1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$E(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

f)

x	$-\infty$		$\frac{9}{2}$		$+\infty$
-7		$-$	|	$-$	
$(2x-9)^2$		$+$	0	$+$	
$F(x)$		$-$	||	$-$	

2. Réaliser un tableau de variations

x	-5		-3		1		4
f	1	↗	4	↘	-2	↗	6

3. Représenter et comparer

D'après le tableau de variations, on peut affirmer que $g(0) < g(2)$ car g est croissante sur $[0 ; 3]$ et $g(5) > g(9)$ car g est décroissante sur $[3 ; +\infty[$. En revanche, on ne peut pas comparer $g(-1)$ et $g(1)$.

4. Encadrer avec les fonctions carré et inverse

a) La fonction carrée étant croissante sur $[0 ; +\infty[$: si $5 \leqslant x \leqslant 8$ alors $25 \leqslant x^2 \leqslant 64$.

La fonction inverse étant décroissante sur $]0 ; +\infty[$: si $5 \leqslant x \leqslant 8$ alors $\frac{1}{5} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{8}$.

b) La fonction carrée étant décroissante sur $]-\infty ; 0]$: si $-7 \leqslant x \leqslant -6$ alors $49 \geqslant x^2 \geqslant 36$.

La fonction inverse étant décroissante sur $]-\infty ; 0[$: si $-7 \leqslant x \leqslant -6$ alors $-\frac{1}{7} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant -\frac{1}{6}$.

c) La fonction carrée étant croissante sur $[0 ; +\infty[$: si $0 < x < \frac{1}{2}$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant \frac{1}{4}$.

La fonction inverse étant décroissante sur $]0 ; +\infty[$: si $0 < x < \frac{1}{2}$ alors $\frac{1}{x} \geqslant 2$.

5. Factoriser - Réduire

1. a) $f(x) = x(5x^2 - x + 12)$

b) $g(x) = (x-1)[(x^2-2) - 3x]$

2. a) $h(x) = \dfrac{x^2 + 6x - 10}{x}$

b) $i(x) = \dfrac{-4(x^2-7) + 8}{x^2 - 7} = \dfrac{-4x^2 + 36}{x^2 - 7}$

c) $j(x) = \dfrac{2x(x-5)^2 - (9x+3)}{(x-5)^2} = \dfrac{2x^3 - 20x^2 + 41x - 3}{(x-5)^2}$

6. Dériver une fonction

1. a) $f'(x) = 6x^2 - 10x + 1$

b) $g'(x) = 11 + \dfrac{50}{(7-x)^2}$

c) $h'(x) = \dfrac{-6x^2 + 32x + 3}{(2x^2+1)^2}$

d) $j'(x) = \dfrac{35x^2 - 36x + 4}{2\sqrt{x}}$

2. a) 25 **b)** $\dfrac{377}{32}$

Activités p. 144-145

Activité 1. Relier une fonction et sa dérivée

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Découvrir le lien entre la variation d'une fonction et le signe de la dérivée, par une approche graphique puis algébrique.

A. Conjecturer avec un logiciel de géométrie dynamique

2. a) La tangente est « montante » si son coefficient directeur est positif, donc la courbe est aussi « montante » en ce point.

b) La tangente est « descendante » si son coefficient directeur est négatif, donc la courbe est aussi « descendante » en ce point.

3. a) $f'(x) \geqslant 0$ sur $]-\infty ; -1]$

b) $f'(x) \leqslant 0$ sur $[-1 ; 5]$

c) $f'(x) \geqslant 0$ sur $[5 ; +\infty[$

4. $f'(x) = 0$ lorsque $x = -1$ ou $x = 5$.

5.

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	42	↘	-66	↗	

6. Lorsque $f'(x)$ est positif sur un intervalle I alors la fonction f est croissante sur I.

Lorsque $f'(x)$ est négatif sur un intervalle I alors la fonction f est décroissante sur I.

B. Étude algébrique du signe de la dérivée

1. $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$

2. $f'(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$, $b = -12$ et $c = -15$. $f'(x)$ est donc du signe de a sur $\mathbb{R}$, sauf entre les racines s'il y en a. Le discriminant Δ est égal à 324. $f'(x)$ a donc deux racines $x_1 = -1$ et $x_2 = 5$. On en déduit donc que $f'(x) = 0$ lorsque $x = -1$ ou $x = 5$, et que $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\ ;\ -1[\cup]5\ ;+\infty[$, et $f'(x) < 0$ sur $]-1\ ;\ 5[$.

3. Cela correspond bien aux résultats trouvés à la question **A.5**.

Activité 2. Optimisation

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Découvrir l'optimisation avec l'aide d'un tableur.

A. Utilisation d'un tableur

2. B2=80/A2

3. C2=2*A2+B2

4. $L_2 = 6{,}3$ m et $L_2 \approx 12{,}7$ m.

B. Modélisation avec une fonction

1. On sait que $L_2 \times L_1 = 80$. Donc $L_2 = \dfrac{80}{L_1} = \dfrac{80}{x}$. Or, Bordure $= 2 \times L_1 + L_2$.

Donc $b(x) = 2x + \dfrac{80}{x}$.

2. b est une somme de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ 20]$, donc elle est dérivable sur $]0\ ;\ 20]$.

$$b'(x) = 2 - \frac{80}{x^2} = \frac{2x^2 - 80}{x^2}$$

3. Le dénominateur x^2 est strictement positif sur $]0\ ;\ 20]$. Donc $b'(x)$ est du signe du numérateur $2x^2 - 80$. Or c'est un trinôme qui a deux racines $x_1 = -2\sqrt{10}$ et $x_2 = 2\sqrt{10}$.

x	0		$2\sqrt{10}$		20
$b'(x)$		$-$	0	$+$	
b		$\searrow$	$25{,}3$	$\nearrow$	

4. $x = 2\sqrt{10}$ correspond à $b'(x) = 0$.

À vous de jouer p. 150-151

1. 1. f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $f'(x) = 10x - 11$.

2.

x	$-\infty$		$1{,}1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

3. On en déduit que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1{,}1]$ et croissante sur l'intervalle $[1{,}1\ ;\ +\infty[$.

2. 1. $h'(x) = -\dfrac{10}{(5 - x)^2}$.

2. Pour tout réel $x \neq 0$, $h'(x)$ est négatif.

3. Donc la fonction h est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 5[\cup]5\ ;\ +\infty[$.

3. 1. $g'(x) = -2x^2 + 6x + 56$

2. et **3.**

x	$-\infty$		-4		7		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

4. Soit x et y deux nombres réels non nuls.

On a $y - x = 100$, c'est-à-dire $y = 100 + x$.

Donc $xy = x(100 + x) = x^2 + 100x$. Le produit xy est donc minimal lorsque la fonction $f : x \mapsto x^2 + 100x$ est minimale.

x	$-\infty$		-50		$+\infty$
$f'(x) = 2x + 100$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	$-2\,500$	$\nearrow$	

La fonction f admet un minimum en $x = -50$ qui vaut $f(-50) = -2\,500$. Ainsi les deux nombres cherchés sont $x = -50$ et $y = 100 + x = 50$.

5. $V = L \times l \times \mathrm{h}$ et $x \in\ ]0\ ;\ 10[$:

$V(x) = (30 - 2x)(20 - 2x)x$

$V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$

V est dérivable sur $]0\ ;\ 10[$:

$V'(x) = 12x^2 - 200x + 600.$

x	0		$\dfrac{25-5\sqrt{7}}{3}$		10
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
V	0	↗		↘	0

Exercices d'application p. 152

Questions - Flash

9. g est décroissante sur $[-10\ ;\ -5]$; donc pour tout réel x de cet intervalle, $g'(x)$ est négatif. Or $-7 \in [-10\ ;\ -5]$. Donc $g'(-7)$ est négatif.

10. g est croissante sur $[-5\ ;\ 3]$. Or $0 \in [-5\ ;\ 3]$. Donc $g'(0)$ est positif.

11. g est décroissante sur $[3\ ;\ 10]$. Or l'intervalle $[4\ ;\ 7]$ est inclus dans l'intervalle $[3\ ;\ 10]$. Donc $g'(x)$ est négatif pour tout x de l'intervalle $[4\ ;\ 7]$.

12. Oui car 2 est le minimum de g sur $[-10\ ;\ 3]$.

13. h est une fonction décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, donc $h'(x)$ est négatif sur $]0\ ;\ +\infty[$.

14. $c'(x) = -2x$. Si x est négatif alors $-2x$ est positif. Donc, pour tout x de $]-\infty\ ;\ 0[$, $c'(x)$ est positif.

15. Non, le signe de la fonction g ne donne aucune indication sur le sens de variation de la fonction g.

16. h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

17. Non, on ne sait pas si la dérivée s'annule en changeant de signe ou non.

18.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

19. La fonction admet un extremum local en -1.

20. $h(x) - g(x) = x^4 - 3x^2$; $h(x) - g(x) = x^2(x^2 - 3)$.
Or x^2 est positif sur $\mathbb{R}$.
$x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$
$x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3}[$
Donc les courbes $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points d'abscisses $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$ et $x = 0$. La courbe $\mathscr{C}_h$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]-\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3}[$. Et $\mathscr{C}_h$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty\ ;\ -\sqrt{3}[$ et sur $]\sqrt{3}\ ;\ +\infty[$.

Positions relatives de courbes

21. 1. a) A et B d'abscisses respectives -6 et 6.
b) l'intervalle $]-\infty\ ;\ -6[$ et sur l'intervalle $]6\ ;\ +\infty[$.
c) l'intervalle $]-6\ ;\ 6[$.
2. a) $x = -6$ ou $x = 6$ **b)** $x \in]-\infty\ ;\ -6[\cup]6\ ;\ +\infty[$
c) $x \in]-6\ ;\ 6[$

22. 1. P est située strictement au-dessus de d sur l'intervalle $]-15;\ 7[$ et en dessous sur les intervalles $]-\infty\ ;\ -15[$ et $]7\ ;\ +\infty[$.
2. $f(x) = g(x)$ lorsque $x = -15$ ou $x = 7$. $f(x) > g(x)$ pour $x \in]-15;\ 7[$. $f(x) < g(x)$ pour $x \in]-\infty\ ;\ -15[\cup]7\ ;\ +\infty[$.

23. 1. d est tangente à P au point A d'abscisse -6. P est située strictement au-dessus de d sur les intervalles $]-\infty\ ;\ -6[$ et $]-6\ ;\ +\infty[$.
2. $f(x) = g(x)$ lorsque $x = -6$. $f(x) > g(x)$ pour $x \in]-\infty\ ;\ -6[\cup]-6\ ;\ +\infty[$. $f(x) < g(x)$ n'a pas de solution.

24. 1. $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_f$ se coupent aux points d'abscisse 0 et 5. $\mathscr{C}_g$ est strictement en dessous de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$ et sur l'intervalle $]5\ ;\ +\infty[$. $\mathscr{C}_g$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $]0\ ;\ 5[$.
2. $f(x) = g(x)$ lorsque $= 0$ ou $x = 5$. $f(x) > g(x)$ pour $x \in]-\infty\ ;\ 0[\cup]5\ ;\ +\infty[$. $f(x) < g(x)$ sur $]0\ ;\ 5[$.

25. 1. $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_f$ se coupent aux points d'abscisse -5 et 10. $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -5[$ et sur $]0\ ;\ 10[$. $\mathscr{C}_f$ est strictement en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]-5\ ;\ 0[$ et sur l'intervalle $]10\ ;\ +\infty[$.
2. $f(x) = g(x)$ lorsque $= -5$ ou $x = 10$.
$f(x) > g(x)$ pour $x \in]-\infty\ ;\ -5[\cup]0\ ;\ 10[$. $f(x) < g(x)$ pour $x \in]-5\ ;\ 0[\cup]10\ ;\ +\infty[$.

26. 1. $f(x) - g(x) = x^2 - 3x + 7 - 5x + 9 = x^2 - 8x + 16$

2. $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$. Donc $f(x) - g(x) = 0$ lorsque $x = 4$, et pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) - g(x) > 0$.

3. Donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

27. 1. $f(x) - g(x) = x + 2 + x^2 - 8 = x^2 + x - 6$

2.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x^2 + x - 6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_f$ se coupent aux points d'abscisse -3 et 2.
$\mathscr{C}_f$ est strictement en-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]-\infty\,;-3[$ et sur $]2\,;+\infty[$.
$\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]-3\,;2[$.

28. 1. $f(x) - g(x) = -3x^2 + 7 - x^2 + 1$

$f(x) - g(x) = -4x^2 + 8$

2.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$-4x^2 + 8$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_f$ se coupent aux points d'abscisse $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$. $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}[$.
$\mathscr{C}_f$ est strictement en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]-\infty\,;-\sqrt{2}[$ et sur $]\sqrt{2}\,;+\infty[$.

Signe de la dérivée et variation de la fonction

29. 1. f est décroissante sur $[-5\,;-4]$ et sur $[1\,;5]$; f est croissante sur $[-4\,;1]$ et sur $[5\,;6]$.

2.

x	-5		-4		1		5		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

30. 1. $f'(x) = 2x + 2$

2. et **3.**

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	-5	$\nearrow$	

4. f est une fonction polynôme de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = -4$. Comme a est positif alors f est décroissante sur $]-\infty\,;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha\,;+\infty[$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$.
Cela confirme le résultat de la question 3.

31. 1. $f'(x) = -4x + 7$

2. et **3.**

x	$-\infty$		$\frac{7}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$5{,}125$	$\searrow$	

4. f est une fonction polynôme de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = 7$ et $c = -1$. Comme a est négatif alors f est croissante sur $]-\infty\,;\alpha]$ et décroissante sur $[\alpha\,;+\infty[$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{-4} = \frac{7}{4}$.
Cela confirme le résultat de la question 3.

32. 1. $f'(x) = \frac{1}{2}x - 8$

2. et **3.**

x	$-\infty$		16		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	-61	$\nearrow$	

4. f est une fonction polynôme de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = \frac{1}{2}$, $b = -8$ et $c = 3$. Comme a est positif alors f est décroissante sur $]-\infty\,;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha\,;+\infty[$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{2\times\frac{1}{4}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$.
Cela confirme le résultat de la question 3.

33. 1. et **2.**

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	

34. 1. $g'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

2. et **3.**

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘	

35. 1. $g'(x) = x^2 + 2$

2.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↗		↘		↗	

36. 1. $g'(x) = -6x^2 + 2x + 8$

2.

x	$-\infty$		-1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g		↘		↗		↘	

37. 1. $g'(x) = \dfrac{-28}{(x-9)^2}$

2. $g'(x)$ est strictement négatif sur $]-\infty\ ;\ 9[\cup]9\ ;+\infty[$.

3. Donc g est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 9[$ et sur $]9\ ;\ +\infty[$.

38. 1. $g'(x) = \dfrac{-2}{(2x+5)^2}$

2. et **3.**

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
-2		$-$		$-$	
$(2x+5)^2$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
g		↘	$\|$	↘	

39. 1. $g'(x) = \dfrac{-400}{(1-4x)^2}$

2. et **3.**

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
-400		$-$		$-$	
$(1-4x)^2$		$+$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
g		↘	$\|$	↘	

40. Le graphique 2.

Extremums et optimisation

41. La fonction dérivée f' s'annule en changeant de signe en $x = 5$, donc la fonction f admet un extremum local en $x = 5$. Il s'agit ici d'un maximum local car la fonction f est croissante sur $]-\infty\ ;\ 5]$ puis décroissante sur $[5\ ;\ +\infty[$.

42. La fonction g n'admet pas d'extremum local car sa dérivée ne change pas de signe.

43. 1. f admet un minimum local en -1.

2. f admet un maximum local en -2.

44. 1. La fonction g admet un minimum local en -8.

2. Il n'y a pas de maximum local.

45. 1. $f'(x) = \dfrac{3}{2}x - 15$

2.

x	$-\infty$		10		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

3. f admet un minimum local en 10.

46. 1. $g'(x) = -12x^2 + 9$

2.

x	$-\infty$		$\frac{-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g		↘		↗		↘	

3. g admet un maximum local en $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et un minimum local en $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

47. 1. $x \in [2\ ;\ 24]$

2. $C_m(x) = \frac{x^2 - 4x + 169}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{4x}{x} + \frac{169}{x} = x - 4 + \frac{169}{x}$

3. $C'_m(x) = 1 - \frac{169}{x^2} = \frac{x^2 - 169}{x^2}$

4. $C'_m(x)$ est sous la forme d'un quotient. Comme le dénominateur x^2 est toujours positif, alors le signe de $C'_m(x)$ est le même que celui de son numérateur.

x	2		13		24
signe de $C'_m(x)$ = signe de $x^2 - 169$		$-$	0	$+$	
C_m		↘		↗	

5. L'entreprise doit fabriquer 13 montres pour avoir un coût moyen minimal.

48. 1. $x \in [0\ ;\ 10]$

2. $f(x) = x^2 + (10 - x)^2 = x^2 + 100 - 20x + x^2$

$= 2x^2 - 20x + 100$

3. $f'(x) = 4x - 20$

4. L'aire du domaine est minimale lorsque $x = 5$.

x	0		5		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

49. Le programme correspond à la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - x^3$.

En développant : $f(x) = -x^3 + x^2 + x + \frac{1}{4}$.

f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$: $f'(x) = -3x^2 + 2x + 1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗	$1{,}25$	↘	

Il faut donc choisir le nombre 1.

Calculs et automatismes

50. $A = \frac{x - 7x^2}{3}$ B = $3x - 9$ C = $x - 10$

51. a) $x \in]-\infty\ ;\ 6]$ **b)** $x \in \left]-\infty\ ;\ \frac{1}{2}\right]$

c) $x \in [-6\ ;\ 6]$ **d)** $x \in [-1\ ;\ 0]$

Exercices d'entraînement p. 156-160

Positions relatives de courbes

52. $f(x) - g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 5x - 9$

x	$-\infty$		2		18		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty\ ;\ 2] \cup [18\ ;+\infty[$. Et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[2\ ;\ 18]$.

53. $f(x) - g(x) = 4x^3 - 5x^2 + \dfrac{3}{2}x$. En factorisant :

$f(x) - g(x) = x\left(4x^2 - 5x + \dfrac{3}{2}\right)$.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$+$	
$4x^2 - 5x + \frac{3}{2}$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty\,;0] \cup \left[\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{3}{4}\right]$.

Et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $\left[0\,;\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3}{4}\,;+\infty\right[$.

54. $f(x) - g(x) = \dfrac{6}{x} - 2x + 1 = \dfrac{6 - 2x^2 + x}{x}$

x	$-\infty$		-2		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x^2 + x + 6$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

Donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty\,;-2] \cup \left]0\,;\dfrac{3}{2}\right]$.

Et $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $[-2\,;0[\cup \left[\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

55. $f(x) - g(x) = \dfrac{7 - x}{x + 3} - \dfrac{5}{x - 2}$

$= \dfrac{(7 - x)(x - 2) - 5(x + 3)}{(x + 3)(x - 2)}$

$= \dfrac{-x^2 + 4x - 29}{x^2 + x - 6}$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$-x^2 + 4x - 29$		$-$	|	$-$	|	$-$	
$x^2 + x - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x) - g(x)$		$-$	||	$+$	||	$-$	

Donc $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty\,;-3[\cup]2\,;+\infty[$. Et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]-3\,;2[$.

56. $f(x) - g(x) = \sqrt{5x} - \dfrac{x}{2}$

Pour tout x non nul, on peut multiplier et diviser par l'expression conjuguée :

$$f(x) - g(x) = \frac{\left(\sqrt{5x} - \frac{x}{2}\right)\left(\sqrt{5x} + \frac{x}{2}\right)}{\sqrt{5x} + \frac{x}{2}} = \frac{5x - \frac{x^2}{4}}{\sqrt{5x} + \frac{x}{2}}$$

x	0		20		$+\infty$
$-\frac{1}{4}x^2 + 4x$		$+$	0	$-$	
$\sqrt{5x} + \frac{x}{2}$		$+$	|	$+$	
$f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	

Donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[0\,;20]$ et en dessous sur $[20\,;+\infty[$.

57. b)

x	$-\infty$		0		$10-6\sqrt{2}$		$10+6\sqrt{2}$		$+\infty$
$-x^2-5x+7$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

c) Donc $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,[10-6\sqrt{2}\,;10+6\sqrt{2}]$. Et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]0\,;10-6\sqrt{2}]\cup[10+6\sqrt{2}\,;+\infty[$.

58. $f(x)-g(x)=\dfrac{x^3-3x-2}{x}=\dfrac{(x-2)(x+1)^2}{x}$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

Donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty\,;0[\cup[2\,;+\infty[$.
Et $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]0\,;2]$.

Étude de fonctions

59. 1. Pour tout réel $x<3$, $9-3x>0$, donc la fonction h est dérivable sur $]-\infty\,;3[$: $h'(x)=\dfrac{-3}{2\sqrt{9-3x}}$.

2. $h'(x)$est strictement négatif sur $]-\infty\,;3[$.

3. h est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;3]$.

60. 1. Pour tout réel $x>-10$, $\dfrac{1}{2}x+5>0$, donc la fonction h est dérivable sur $]-10\,;+\infty[$: $h'(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{\dfrac{1}{2}x+5}}$.

2. $h'(x)$est strictement positif sur $]-10\,;+\infty[$.

3. h est donc strictement croissante sur $[-10\,;+\infty[$.

61. $f'(x)=4x^3-9x^2+2x$

$f'(x)=x(4x^2-9x+2)$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$4x^2-9x+2$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

62. $g'(x)=\dfrac{1}{2}x^2(5-x^2)-2x\left(\dfrac{1}{6}x^3\right)$

Donc en réduisant : $g'(x)=-\dfrac{5}{6}x^4+\dfrac{5}{2}x^2$.

Et en factorisant, $g'(x)=5x^2\left(-\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{1}{2}\right)$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$5x^2$		$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
$-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

63. $h'(x)=\dfrac{7(2x-2)}{(x-1)^4}$

$(x-1)^4$ est strictement positif sur D, donc $h'(x)$ a le même signe que $(2x-2)$ sur D. Or $2x-2<0$ lorsque $x<1$et $2x-2>0$ lorsque $x>1$.

Donc h est décroissante sur $]-\infty\,;1[$ et croissante sur $]1\,;+\infty[$.

64. $i'(x) = \dfrac{x^2 - 12x - 13}{(x^2 + 13)^2}$

$(x^2 + 13)^2$ est strictement positif sur D. Donc $i'(x)$ a le même signe que le trinôme $x^2 - 12x - 13$ sur D.

x	$-\infty$		-1		13		$+\infty$
$i'(x)$		+	0	−	0	+	
i		↗		↘		↗	

65. $j'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{8} = -\dfrac{8 + x^2}{8x^2}$

x^2 étant strictement positif sur D alors $8 + x^2$ est strictement positif ainsi que $8x^2$. Donc $j'(x)$ est strictement négatif sur D. Donc j est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et sur $]0\ ;+\infty[$.

66. 1. $g'(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{4}{(2x+3)^2} = \dfrac{\frac{1}{4}(2x+3)^2 - 4}{(2x+3)^2}$

Donc $g'(x) = \dfrac{x^2 + 3x - \frac{7}{4}}{(2x+3)^2}$.

2. $(2x + 3)^2$ est strictement positif sur D. Donc $g'(x)$ a le même signe que le trinôme $x^2 + 3x - \dfrac{7}{4}$ sur D.

3.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
g		↗		↘	‖	↘		↗	

67. $h'(x) = \dfrac{-10x + 2}{(5x^2 - 2x + 1)^2}$

$5x^2 - 2x + 1$ est strictement positif.

Donc $h'(x)$ a le même signe que $-10x + 2$ sur $\mathbb{R}$.

$-10x + 2 = 0$ lorsque $x = \dfrac{1}{5}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	−	
h		↗	1,25	↘	

Donc h admet un maximum local en $\dfrac{1}{5}$ qui est aussi le maximum de la fonction.

68. $f'(x) = \dfrac{5(2x+1)}{(x^2 + x - 12)^2}$

x	$-\infty$		-4		$-\frac{1}{2}$	0 2	3		$+\infty$
$10x + 5$		−	|	−	0	+	|	+	
$(x^2 + x - 12)^2$		+	0	+	|	+	0	+	
$f'(x)$		−	‖	−	0	+	‖	+	
f		↘	‖	↘	$\frac{20}{49}$	↗	‖	↗	

Donc sur l'intervalle I = [0 ; 2] la fonction f est strictement croissante et n'admet donc pas de minimum local.

69. Graphique 3.

70. $f'(x) = \dfrac{4x^3}{100} - \dfrac{98x}{100} = \dfrac{2x}{100}(2x^2 - 49)$.

x	$-\infty$		$\frac{-7\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{7\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$\frac{2x}{100}$		−	|	−	0	+	0	+	
$2x^2 - 49$		+	0	−	|	−	|	+	
$f'(x)$		−	|	+	0	−	|	+	
f		↘	$-\frac{1}{400}$	↗	6	↘	$-\frac{1}{400}$	↗	

La conjecture est donc fausse car le minimum de la fonction est négatif.

71. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout réel x, $f'(x) \geqslant 0$.

Or, $f'(x) = 3x^2 - 6x + m$.

Un trinôme est du signe de a sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son discriminant Δ est négatif ou nul. Ici, le coefficient a est égal à 3, il est donc positif. Donc : pour tout réel x, $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \Delta \leqslant 0 \Leftrightarrow 36 - 12m \leqslant 0$ $\Leftrightarrow m \geqslant 3$.

Donc f est strictement croissante si et seulement si $m \geqslant 3$.

72. $h'(x) = 3x^2 - a$

C'est un trinôme de discriminant $\Delta = 12a$.

Donc Δ et a ont le même signe.

Or, si Δ est négatif ou nul alors le trinôme est de signe constant sur $\mathbb{R}$. Cela signifie que si $a \leqslant 0$ alors $h'(x)$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$, et donc que la fonction h n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}$.

Si $a \geqslant 0$ alors $h'(x)$ admet deux racines et on a donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\dfrac{a}{3}}$		$\sqrt{\dfrac{a}{3}}$		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	−	0	+	

Donc, si $a \geqslant 0$ la fonction h admet un maximum local en $-\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ et un minimum local en $\sqrt{\dfrac{a}{3}}$.

73. a) $-1 \leqslant g(x) \leqslant 0$

b) $-1 \leqslant g(x) \leqslant 9$

c) $-1 \leqslant g(x) \leqslant 9$

d) $g(a) < g(b)$ car g est croissante sur $[-5 ; -2]$.

e) $g(a) > g(b)$ car g est décroissante $[-2 ; 3]$.

f) $g(a) > g(b)$

74. a) Vraie car la fonction carrée est décroissante sur $]-\infty ; 0[$.

b) Vraie car la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty ; 0[$.

c) Fausse car diviser par un nombre positif ne change pas l'ordre.

d) Vraie car la fonction cube est croissante sur $]-\infty ; 0[$.

e) Vraie car multiplier par -1 change l'ordre.

75. $3 \leqslant x \leqslant 5 \Leftrightarrow -3 \geqslant -x \geqslant -5 \Leftrightarrow 0 \geqslant -x + 3 \geqslant -2$ $\Leftrightarrow 0 \leqslant (-x + 3)^2 \leqslant 4$

76. $f'(x) = 8x - 12$

x	$-\infty$		1,5		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
f		↘	-8	↗	

Sur $[0 ; 1]$ f est décroissante et $f(1) = -7$, donc pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $f(x) \geqslant -7$.

77. $g'(x) = -2x + 4$

x	0		2		5
$g'(x)$		+	0	−	
g	-3	↗	1	↘	-8

Sur l'intervalle $[0 ; 5]$ g a pour minimum -8, et pour maximum 1 donc pour tout réel x, $-8 \leqslant g(x) \leqslant 1$.

78. 1.

x	$-\infty$				0		3		$+\infty$
$x - 2$		−		−		−	0	+	
$(x + 1)^2$		+	0	+		+		+	
x^3		−		−	0	+		+	
$h'(x)$		+	0	+	‖	−	0	+	
h		↗		↗	‖	↘	$\dfrac{27}{4}$	↗	

2. Sur l'intervalle $]0 ; 2]$ la fonction h est décroissante et $h(2) = \dfrac{27}{4}$, donc si $0 < x \leqslant 2$ alors $h(x) \geqslant \dfrac{27}{4}$.

79. 1. $f'(x) = 3x^2 - 3$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f		↗	2	↘	-2	↗	

2. La fonction f est décroissante sur $[-1\ ;\ 1]$ donc, si a et b sont des réels de cet intervalle tels que $a < b$, alors $f(a) > f(b)$; c'est-à-dire $a^3 - 3a > b^3 - 3b$. Et donc : $a^3 - b^3 > 3a - 3b$.

80. 1. $h(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 1$

$h'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3)$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	−	0	+	

2. $h'(x)$ est positif sur $[1\ ;+\infty[$, donc aussi sur $[2\ ;+\infty[$. Par conséquent, h est croissante sur $[2\ ;+\infty[$.

3. $h(2) = 1$, donc comme h est croissante à partir de 2, alors h est positive sur $[2\ ;+\infty[$. Et par conséquent $f(x) \geqslant g(x)$ sur l'intervalle $[2\ ;+\infty[$.

Problèmes d'optimisation

81. 1. C est définie sur $[0\ ;\ 20]$.

2. $R(x) = 19x$

3. $B(x) = 19x - (x^2 - x + 10)$

$B(x) = -x^2 + 20x - 10$

4. $B'(x) = -2x + 20$

x	0		10		20
$B'(x)$		+	0	−	
B	-10	↗	90	↘	-10

5. La coopérative doit donc produire 10 dizaines de litres, c'est-à-dire 100 litres afin d'obtenir un bénéfice maximum.

82. 1. Périmètre = 2Longueur + 2largeur.

Donc $2L + 2x = 50$. Soit $L = \dfrac{50 - 2x}{2} = 25 - x$.

2. $A(x) = L \times l = (25 - x)x = 25x - x^2$.

3.

x	0		$12{,}5$		25
$A'(x)$		+	0	−	
A	0	↗	$156{,}25$	↘	0

L'aire maximum de ce rectangle est de 156,25 cm².

83. 1. À l'aide du théorème de Thalès, on obtient :

$\dfrac{MC}{MO} = \dfrac{DO}{BC} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x-3} = \dfrac{OD}{2}$.

Donc $OD = \dfrac{2x}{x-3}$.

2. $\text{Aire}(OMD) = \dfrac{1}{2} OD \times OM$

Donc : $g(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{x-3} \times x = \dfrac{x^2}{x-3}$.

3. $g'(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}$

$(x-3)^2$ est strictement positif sur $]3\ ;\ +\infty[$, donc $g'(x)$ a le même signe que le trinôme $x^2 - 6x$.

x	3		6		$+\infty$
$g'(x)$		−	0	+	
g		↘	12	↗	

84. A. 1. $C_m(x) = \dfrac{0{,}2x^2 + 8x + 500}{x} = 0{,}2x + 8 + \dfrac{500}{x}$

$C'_m(x) = 0{,}2 - \dfrac{500}{x^2} = \dfrac{0{,}2x^2 - 500}{x^2}$

2. x^2 est strictement positif sur $[10\ ;\ 100]$, donc $C'_m(x)$ a le même signe que le trinôme $0{,}2x^2 - 500$.

x	10		50		100
$C'_m(x)$		−	0	+	
C_m		↘	28	↗	

B. 1. a) $p(40) = 62 - \dfrac{40}{4} = 52$.

Le prix de vente d'une tonne, pour une production de 40 tonnes, est égale à 5 200 €.

b) $R(x) = \left(62 - \dfrac{x}{4}\right)x = 62x - \dfrac{x^2}{4}$

2. a) $B(x) = 62x - 0{,}25x^2 - (0{,}2x^2 + 8x + 500)$

$= -0{,}45x^2 + 54x - 500$

b) $B'(x) = -0{,}90x + 54$

x	10		60		100
$B'(x)$		+	0	–	
B	–5	↗	1 120	↘	400

L'entreprise doit produire et vendre 60 tonnes de produit afin d'obtenir un bénéfice maximal égal à 1 120 €.

85. 1. $-\frac{1}{2}x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 4$

Donc $x_A = -4$ et $x_B = 4$.

2. $AN = x + 4$ et $MN = -\frac{1}{2}x^2 + 8$.

3. $\text{Aire} = \frac{AN \times AM}{2}$

Donc $f(x) = \frac{1}{2}(x+4)\left(-\frac{1}{2}x^2 + 8\right)$

$f(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^3 + 8x - 2x^2 + 32\right)$

$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 4x - x^2 + 16.$

4. a) $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 - 2x + 4$

b) et **c)**

x	–4		$\frac{4}{3}$		4
$f'(x)$		+	0	–	
f		↗		↘	

5. L'aire maximale est obtenue lorsque le point M est placé à l'abscisse $\frac{4}{3}$.

86. 1. $f'(x) = t^2 - 6t + 9 = (t-3)^2$.

$f'(x)$ est strictement positif sauf en $x = 3$ où elle s'annule. Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; 6]$.

2. En regardant la courbe on constate que le mobile avance en ralentissant pendant les trois premières secondes, s'arrête lorsque $t = 3$ puis repart en accélérant entre 3 et 6 secondes.

3. $f'(0) = 9$. Donc le mobile a une vitesse initiale de 9 cm · s^{-1}.

$f'(t) < 1 \Leftrightarrow (t-3)^2 - 1 < 0$

$\Leftrightarrow (t-4)(t-2) < 0$

Donc la vitesse est inférieure à 1 cm · s^{-1} entre 2 et 4 secondes.

87. 1. Le triangle étant isocèle, la droite (CH) est un axe de symétrie. Le point E ou le point F jouent donc le même rôle et peuvent s'interchanger. Donc on peut considérer que les différents rectangles peuvent tous s'obtenir en faisant varier le point E entre A et H. Donc $0 \leqslant AE \leqslant 4$.

2. $HC = 3$

3. $\frac{AE}{AH} = \frac{EM}{HC} \Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{EM}{3}$. Donc $EM = \frac{3x}{4}$.

$A(x) = EM \times EF = \frac{3x}{4} \times (8 - 2x) = 6x - \frac{3}{2}x^2.$

4. L'aire du rectangle est donc maximale lorsque $x = 2$ car le sommet de la parabole representant la fonction trinôme $A(x)$ est situé en $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \times -\frac{3}{2}} = 2.$

Courbes et tangentes

88. 1. f est une fonction du second degré de coefficient a positif donc f est décroissante sur $]-\infty ; \alpha]$ et croissante sur $[\alpha ; +\infty[$, avec $\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{2 \times \frac{1}{4}} = 1.$

f admet donc un minimum local en $\alpha = 1$, ce qui signifie que $f'(1) = 0$.

2. a) La tangente $\mathcal{T}_A$ a pour équation :

$y = f'(-2)(x + 2) + f(-2)$.

C'est à dire : $y = -\frac{3}{2}x - 3$.

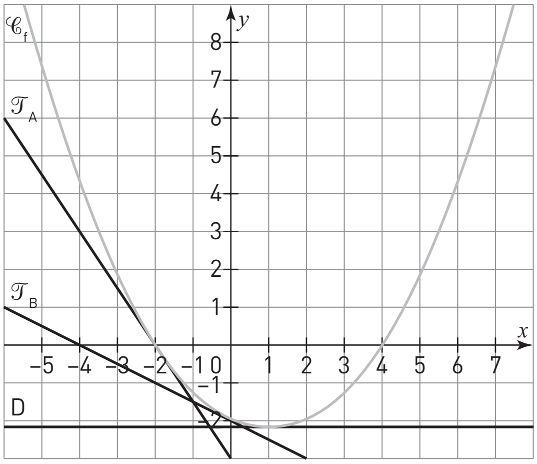
b) $f(x) - \left(-\frac{3}{2}x - 3\right) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1 = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2$. Ce qui est toujours positif. Donc $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de $\mathcal{T}_A$ sur $\mathbb{R}$.

3. a) $\mathcal{T}_B : y = -\frac{1}{2}x - 2$

b) $f(x) - \left(-\dfrac{1}{2}x - 2\right) = \dfrac{1}{4}x^2$.

Donc $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de $\mathscr{T}_B$ sur $\mathbb{R}$.

4. 5. 6. 7.



89. 1. $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
g		↗	2	↘	-2	↗	

$\mathscr{C}_g$ admet donc deux tangentes horizontales en $x = -1$ et en $x = 1$.

2. La tangente $\mathscr{T}_A$ a pour équation :

$y = f'(-1{,}5)(x + 1{,}5) + f(-1{,}5)$

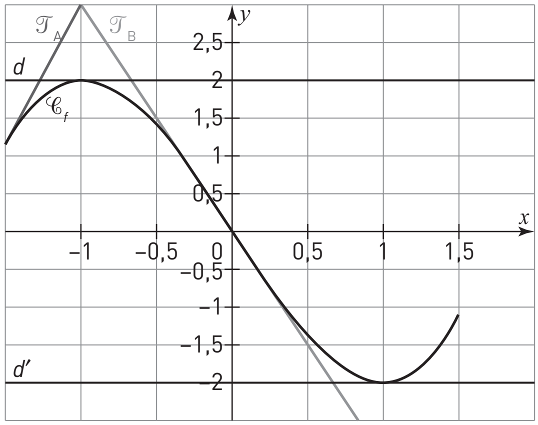
$y = 3{,}75x + 6{,}75$

3. a) La tangente $\mathscr{T}_B$ a pour équation : $y = -3x$

b) $f(x) - (-3x) = x^3$

Or : $x^3 \leqslant 0$ si $x \leqslant 0$ et $x^3 \geqslant 0$ si $x \geqslant 0$ Donc $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{T}_B$ sur $]-\infty\,;0]$ et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{T}_B$ sur $[0\,;+\infty[$.

4. 5. 6. 7.



Travailler autrement

90. C'est Élise qui a répondu correctement en utilisant ses connaissances sur le second degré. Élias a oublié de dériver et a fait un lien incorrect entre le signe de *f* et les variations de *f*.

Exercices bilan p. 161-162

93. Coût minimal et bénéfice maximal

A. 1. $C_m(x) = C'(x) = 3x^2 - 60x + 309$

$= 3(x^2 - 20x + 100) + 9 = 3(x - 10)^2 + 9$

2. $C_m(x)$ est un trinôme de la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a = 3$, $\alpha = 10$ et $\beta = 9$. Donc la fonction C_m a un minimum en $\alpha = 10$. Le coût marginal est minimal pour 10 paires de bottes fabriquées.

B. 1. $B(x) = 201x - (x^3 - 30x^2 + 309x + 500)$

$= -x^3 + 30x^2 - 108x - 500$

2. $B'(x) = -3x^2 + 60x - 108$

C'est un trinôme de discriminant $\Delta = 256$ et de racines $x_1 = 2$ et $x_2 = 12$.

x	0		2		12		30
$B'(x)$		+	0	−	0	+	
B	-500	↘	-604	↗	796	↘	$-3\,740$

Il faut fabriquer et vendre 12 paires de bottes pour obtenir un bénéfice maximum de 796 €.

94. $f(x) = \dfrac{x}{3} + 1 + \dfrac{3}{x}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 9}{3x^2}$

x	0		3		
$f'(x)$		−	0	+	
f		↘	3	↗	

a) Faux, car $f'(2) \neq 0$.

b) Vrai d'après le tableau ci-dessus.

c) Faux car $(x-3)^2 \neq x^2 - 9$.

d) Vrai car 3 est le minimum sur $]0\,;+\infty[$.

e) Vrai car $f'(6) = \dfrac{1}{4}$ et $f(6) = 3{,}5$.

f) Faux car $f(x) - \left(\dfrac{1}{4}x + 2\right) = \dfrac{(x-6)^2}{12x}$.

Or $(x-6)^2 \geqslant 0$ et $12x > 0$ sur $]0\,;+\infty[$. Donc $f(x) \geqslant \dfrac{1}{4}x + 2$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

g) Vrai car $f(x) - \left(-\dfrac{2}{3}x + 5\right) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{3x}$.

x	0		1		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		+	0	−	0	+	
$3x$		+	|	+	|	+	
$f(x) - d$		+	0	−	0	+	

95. 1. MN $= 2x$ et MQ $= 5 - x^2$. Donc :

Aire (MNPQ) $= 2x(5 - x^2) = -2x^3 + 10x$.

2. Soit $f(x) = -2x^3 + 10x$.

a) M est sur l'arc $\widehat{OA}$, donc $x \in [0\,;\sqrt{5}]$.

b) $f'(x) = -6x^2 + 10$

x	0		$\dfrac{\sqrt{15}}{3}$		$\sqrt{5}$
$f'(x)$		+	0	−	
f	0	↗	$\dfrac{20\sqrt{15}}{9}$	↘	0

3. M a pour coordonnées $\left(\dfrac{\sqrt{15}}{3}; \dfrac{5}{9}\right)$

L'aire maximale vaut $\dfrac{20\sqrt{15}}{9}$.

96. 1. et **2.** $g'(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		−	|	−	0	+	|	+	
$x^2 - 4$		+	0	−	|	−	0	+	
$g'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
g		↘	-7	↗	-3	↘	-7	↗	

3. a) $-7 \leqslant g(x) \leqslant -3$

b) $-7 \leqslant g(x) \leqslant -3$ car $g(-3) = -\dfrac{3}{4}$.

97. 1. $C_M(q) = \dfrac{4}{q} + 1 + \dfrac{q}{4}$

$C_m(q) = 1 + \dfrac{1}{2}q$.

2. $C'_M(q) = -\dfrac{4}{q^2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{q^2 - 16}{q^2}$.

x	1		4		20
$C_M'(x)$		−	0	+	
C_M	5,25	↘	3	↗	5,2

3. $C_m(4) = 1 + \dfrac{4}{2} = 3$

Donc $C_m(4) = C_M(4)$.

98. 1. $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

$f'(x)$ est un trinôme $ax^2 + bx + c$ de discriminant $\Delta = -11$. Or a est positif.

Donc $f'(x)$ est positive sur $\mathbb{R}$.

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. $f(x) = 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\dfrac{2}{3}$.

Donc en $x = 0$, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente de coefficient directeur 1. L'équation de cette tangente est $y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow y = x$ car $f(0) = 0$.

3. $f(x) - x = x^3 + x^2 = x^2(x + 1)$.

x^2 est positif sur $\mathbb{R}$, donc $f(x) - x$ a le même signe que $(x + 1)$ sur $\mathbb{R}$.

Or $x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$

Donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de d sur $[-1\,;+\infty[$, et $\mathscr{C}_f$ est en dessous de d sur $]-\infty\,;-1]$.

4. $f'(x) = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + 2x + \dfrac{1}{3} = 0.$

Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 0$. Donc l'équation admet une unique solution $x_0 = -\dfrac{1}{3}$. Donc il existe une unique tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ de coefficient directeur $\dfrac{2}{3}$.

5. L'équation de la tangente $\mathcal{T}$ est :

$$y = f'\left(-\frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$y = \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{7}{27} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{27}$$

Donc on a :

$$f(x) - \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{27}\right) = x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{27}.$$

Grâce au logiciel Xcas on obtient :

$$f(x) - \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{27}\right) = \frac{(3x+1)^3}{27}$$

$(3x + 1)^3$ a le même signe que $(3x + 1)$.

Or $3x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{1}{3}$.

Donc $f(x) - \left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{27}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{1}{3}$.

Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{T}$ sur $\left[-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$ et $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{T}$ sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{3}\right]$.

99. 1. a) $f'(x) = 3x^2 + 4x$

C'est un trinôme de racines évidentes 0 et $-\dfrac{4}{3}$. Il est du signe de $a = 3$ « à l'extérieur » des racines, donc il est positif sur [0 ; 1]. La fonction f est donc croissante sur [0 ; 1].

b) $f(x) - x = x^3 + 2x^2 - x = x(x^2 + 2x - 1)$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		0		$-1+\sqrt{2}$		1
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2+2x-1		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)-x$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc, sur $[0\,;-1+\sqrt{2}]$, $f(x) - x \leqslant 0$ et sur $[-1+\sqrt{2}\,;1]$, $f(x) - x \leqslant 0$.

c) Donc $\mathcal{C}_f$ n'est pas une courbe de Lorenz.

2. $g'(x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{3x^2 + 6x + 1}{2(x+1)^2}$

$g'(x)$ a le même signe que le trinôme $3x^2 + 6x + 1$. Or $\Delta = 24$ et les racines x_1 et x_2 sont négatives. Donc sur [0 ; 1], le trinôme est du signe de $a = 3$, c'est-à-dire positif.

Par conséquent g est croissante sur [0 ; 1].

De plus $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.

D'autre part $g(x) - x = \dfrac{x(x-1)}{2(x+1)}$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$g(x)-x$		$-$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc, sur [0 ; 1], $g(x) - x \leqslant 0$.

Donc $\mathcal{C}_g$ est une courbe de Lorenz.

100. 1. $f'(x) \leqslant 0$ sur]0 ; 2[et $f'(x) \geqslant 0$ sur [2 ;+∞[.

2. f est donc décroissante sur]0 ; 2[et croissante sur [2 ; +∞[.

3. a) Tangente en 1 : $y = -6x + 6$.

Tangente en 2 : $y = -2$.

Tangente en 4 : $y = 1{,}5x - 6$.

4. a) $f'(x) = a - \dfrac{b}{x^2}$

b) $f'(2) = 0 \Leftrightarrow a - \dfrac{b}{2^2} = 0$

$f'(1) = -6 \Leftrightarrow a - \dfrac{b}{1^2} = -6$

Donc : $\begin{cases} a - \dfrac{b}{4} = 0 \\ a - b = -6 \end{cases}$

c) Par soustraction membre à membre on a : $\dfrac{3}{4}b = 6$, donc $b = 8$ et $a = 2$.

Comme $f(1) = 0$ alors on en déduit que $c = -10$.

Exercices d'approfondissement p. 163-164

101. Triangle isocèle et aire minimale

1. Raisonnons par l'absurde : si BC > 5 alors, comme le périmètre est égale à 10, on aurait : BA + AC < 5.

Mais d'après l'inégalité triangulaire :

BC ⩽ BA + AC.

Donc BC ne peut pas être supérieur à 5.

Donc $x \leqslant 5$.

2. $AH^2 = AC^2 - HC^2$. Or $AC = \dfrac{10-x}{2} = 5 - \dfrac{x}{2}$.

Donc $AH^2 = \left(5 - \dfrac{x}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = 25 - 5x$.

D'où $AH = \sqrt{25-5x}$.

3. Aire $= \dfrac{BC \times AH}{2} \Leftrightarrow A(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{25-5x}$.

4. $A'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{25-5x} - \dfrac{5x}{2\sqrt{25-5x}}$

$A'(x) = \dfrac{25-10x}{2\sqrt{25-5x}}$.

5. $A'(x)$ a le même signe que $25 - 10x$.

x	0		2,5		5
$A'(x)$		+	0	–	
A	0	↗	$\dfrac{25\sqrt{2}}{4}$	↘	0

102. Parabole, tangente et aire minimale

L'équation de la tangente en A est :

$y = -2a(x-a) + 1 - a^2$

$y = -2ax + a^2 + 1$.

Donc le point M a pour coordonnées $(0\ ;\ a^2+1)$ et le point N a pour coordonnées $\left(0\ ;\ \dfrac{a^2+1}{2a}\right)$.

$\text{Aire(OMN)} = \dfrac{OM \times ON}{2} = \dfrac{(a^2+1)(a^2+1)}{4a}$.

Donc $f(a) = \dfrac{a^4 + 2a^2 + 1}{4a}$ avec $a \neq 0$.

$f'(a) = \dfrac{(4a^3+4a)(4a) - 4(a^4+2a^2+1)}{16a^2}$.

$f'(a) = \dfrac{3a^4 + 2a^2 - 1}{4a^2}$.

Étudions le signe de $3a^4 + 2a^2 - 1$ à l'aide d'un changement de variable :

On pose $X = a^2$, et on obtient : $3X^2 + 2X - 1$. C'est un trinôme qui s'annule en $X = -1$ ou $X = \dfrac{1}{3}$. Donc

$3X^2 + 2X - 1$ est positif pour $X \in]-\infty ; -1] \cup \left[\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$

et négatif pour $X \in \left[-1\ ;\ \dfrac{1}{3}\right]$.

Or $X = a^2$, donc $3a^4 + 2a^2 - 1$ est positif pour $a^2 \leqslant -1$ ou $a^2 \geqslant \dfrac{1}{3}$ et négatif pour $-1 \leqslant a^2 \leqslant \dfrac{1}{3}$; c'est-à-dire

$3a^4 + 2a^2 - 1$ est positif pour $a \in \left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ +\infty\right[$ et négatif pour $a \in \left]0\ ;\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Donc f est décroissante sur $\left]0\ ;\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ et croissante sur $\left]\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ 1\right]$. Le triangle OMN a donc une aire minimale en $a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

103. À l'aide d'un logiciel de calcul formel

L'aire du rectangle OBAC est égale à

$g(x) = x\sqrt{100 - x^2}$

$g'(x) = \dfrac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$

x	0		$5\sqrt{2}$		10
$g'(x)$		+	0	–	
g	0	↗	50	↘	0

104. Positions relatives d'une courbe et de ses tangentes

A. 1. Le nombre 1 étant une racine évidente de $P(x)$ et sachant que $P(x)$ est un polynôme de degré 3, alors $P(x)$ peut s'écrire sous la forme $(x-1)(ax^2 + bx + c)$.

2. En développant et réduisant cette dernière expression, on obtient par identification des coefficients :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 1 \\ c - b = -1 \\ -c = -1 \end{cases}$$

Donc $a = 1$; $b = 2$ et $c = 1$.

B. 1. $f'(x) = \dfrac{-2x+1}{(1-x+x^2)^2}$

2.

x	$-\infty$		$0{,}5$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	

3. a) $\mathcal{T}_A$ a pour équation

$y = f'(-1)(x+1) + f(1)$; c'est-à-dire $y = \dfrac{1}{3}(x+1) + \dfrac{1}{3}$;

donc $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$.

$$f(x) - \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) = \frac{3-(x+2)(x^2-x+1)}{3(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{-x^3 - x^2 + x + 1}{3(x^2-x+1)}.$$

$$= \frac{-(x-1)(x^2+2x+1)}{3(x^2-x+1)}$$

Or $x^2 - x + 1$ est un trinôme de discriminant $\Delta < 0$, et tel que $a > 0$, alors $x^2 - x + 1$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

De plus $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$.

Donc $f(x) - \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}$ est du signe de $-x + 1$ sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire positif lorsque $x \leqslant 1$ et négatif lorsque $x \geqslant 1$.

Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{T}_A$ sur $]-\infty\ ;\ 1]$ et en dessous sur $[1\ ;\ +\infty[$.

b) $\mathcal{T}_B : y = x + 1$

$$f(x) - (x+1) = \frac{1-(x+1)(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{-x^3}{(x^2-x+1)}$$

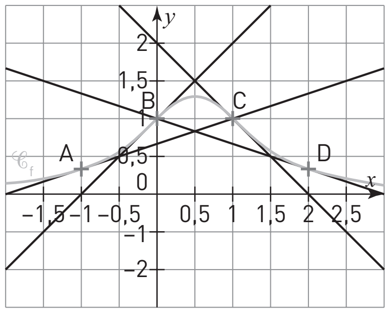
$-x^3 \geqslant 0$ lorsque $x \leqslant 0$ et $-x^3 \leqslant 0$ lorsque $x \geqslant 0$.

Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{T}_A$ sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et en dessous sur $[0\ ;\ +\infty[$.

4. $\mathcal{T}_C : y = -x + 2$.

$\mathcal{T}_D : y = -\dfrac{1}{3}x + 1$.

5.



105. De l'importance de savoir factoriser avant de développer

1. $f'(x) = \dfrac{3(2+x)^2 \times 2x^2 - 4x(2+x)^3}{(2x^2)^2}$

Donc : $f'(x) = \dfrac{(2+x)^2(3x^2 - 2x(2+x))}{2x^4}$.

C'est-à-dire : $f'(x) = \dfrac{(2+x)^2(x^2-4x)}{2x^4}$.

$(2+x)^2$ et $2x^4$ sont positifs sur $\mathbb{R}^*$, donc le signe de $f'(x)$est le même que celui de $x^2 - 4x$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	‖	$\searrow$	$6{,}75$	$\nearrow$	

2. La fonction f admet un minimum local en 4.

3. La tangente à $\mathcal{C}_f$ en -2 a pour équation : $y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$.

Or $f'(-2) = 0$ et $f(-2) = 0$.

Donc l'équation est $y = 0$, ce qui correspond à l'axe des abscisses.

4. $y = -2x + 12$

5. $y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$

106. Hyperbole et parabole : positions relatives

1. $f'(x) = \frac{8}{(x+2)^2}$; $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$; donc f est croissante sur $]-\infty\,;-2[$ et sur $]-2\,;+\infty[$.

2. g est décroissante sur $]-\infty\,;-1]$ et croissante sur $[-1\,;+\infty[$.

3. $g(x) - f(x) = \frac{x^3 + 4x^2}{x+2} = \frac{x^2(x+4)}{x+2}$

4.

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
x^2		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$+$	
$x+2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$g(x) - f(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$+$	

$\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur $]-\infty\,;-4]\cup]-2\,;+\infty[$ et en dessous sur $[-4\,;-2[$.

5. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 est la même que celle de la tangente à $\mathscr{C}_g$ en 0 : $y = 2x - 1$. Donc les deux courbes sont tangentes en 0. ,

107. Vitesse maximale

1. $V = \frac{D}{t} = \frac{d(3)}{3} = \frac{243}{3} = 81$ km/h.

2. a) $d'(t) = -54t^2 + 162t$

b) $d'(0{,}5) = 67{,}5$ et $d'(2) = 108$

3. $d'(t) > 80 \Leftrightarrow -54t^2 + 162t - 80 > 0$

C'est un trinôme de discriminant $\Delta = 2\,241$ et de racines $t_1 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{249}}{18}$ et $t_2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{249}}{18}$; il est donc positif entre les racines c'est-à-dire entre $t_1 \approx 0{,}62$ h et $t_2 \approx 2{,}38$ h. La vitesse est donc strictement supérieur à 80 km/h à partir de 37 min et jusqu'à 2 h 23min.

4. Le maximum de d'(t) est obtenu en $\alpha = \frac{-162}{2\times(-54)} = 1{,}5$. $d'(1{,}5) = 121{,}5$.

108. Élasticité-prix

1. $D(20) = 520$;

2. a) $\frac{19{,}90 - 20}{20} = -0{,}005 = -0{,}5\ \%$

b) $D(19{,}90) = 522{,}4$

3. var°demande $= \frac{522{,}4 - 520}{520} = 0{,}0046$

Donc l'élasticité-prix est égale à : $\frac{0{,}46}{-0{,}5} = -0{,}92$.

4. $D'(x) = -24$. Or l'élasticité-prix est égale à : $\frac{20 \times D'(20)}{D(20)}$. Donc : $\frac{20\ \times(-24)}{520} \approx -0{,}923$;

Vers la Terminale

109. 1. a) $f'(0) = 11{,}25$

b) Le nombre maximum de malades est d'environ 250 au milieu du 7e jour. À ce moment la vitesse d'évolution de la maladie est nulle.

c) La tangente à la courbe semble avoir une pente maximale entre 3 et 4 environ.

2. $f'(t) = -3t^2 + 21t + \frac{45}{4}$. C'est un trinôme de discriminant $\Delta = 576$ et de racines $\frac{15}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{15}{2}$		11
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
A	0	$\nearrow$	$253{,}125$	$\searrow$	

3. a) $f''(t) = -6t + 21$

b) $f''(t) = 0 \Leftrightarrow -6t + 21 = 0 \Leftrightarrow t = 3{,}5$.

On retrouve la valeur de t pour laquelle la vitesse d'évolution est maximale.

110. 1. a) $g'(x) = -12x^2 + 18x = 6x(-2x + 3)$

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
g	-7	$\nearrow$	$-0{,}25$	$\searrow$	

b) g admet un maximum sur $]0\,;+\infty[$ qui vaut $-0{,}25$.

Donc, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $g(x) < 0$.

2. a) $f'(x) = -\dfrac{4}{3}x + 3 - \dfrac{7}{3x^2} = \dfrac{-4x^3 + 9x^2 - 7}{3x^2} = \dfrac{g(x)}{3x^2}$.

b) $g(x) < 0$ sur $]0\,;+\infty[$ et $3x^2 > 0$.

Donc $f'(x) < 0$ sur $]0\,;+\infty[$.

La fonction f est donc décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

Travaux pratiques p. 165-166

TP 1. Drapeau flottant

- **Durée estimée :** 60 min
- **Objectif :** Modéliser un motif à l'aide de fonctions définies par morceaux et le représenter avec un logiciel de géométrie.

A. Réalisation du premier prototype

1. a) $f'(x) = \dfrac{2}{5}x - 2$.

x	$-\infty$		5		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

b) Les variations correspondent bien au morceau de parabole rouge.

2. b) $g'(x) = -\dfrac{2}{5}x + 6$; donc $g'(10) = 2$.

$f'(10) = 2$. Donc la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_g$ a le même coefficient directeur que la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_f$. Par conséquent il s'agit de la même tangente.

3. a) La tangente à $\mathscr{C}_g$ au point B a pour équation : $y = g'(20)(x - 20) + g(20)$.

C'est-à-dire $y = -2x + 40$. Donc $m = -2$ et $p = 40$.

B. Réalisation du second prototype

1. $p'(x) = -3x^2 + 14x - 11$.

x	$-\infty$		1		$\dfrac{11}{3}$		4
$p'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
p		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

2. $y = -3x + 16$.

TP 2. Méthode de Newton-Raphson pour résoudre une équation de la forme $f(x) = 0$

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Découvrir une méthode pour déterminer une valeur approchée d'une solution de l'équation $f(x) = 0$, en commençant par une approche graphique, puis en programmant l'algorithme correspondant à la construction graphique pas à pas.

A. Étude d'un exemple avec GeoGebra

1. $f'(x) = 6x^2 - 1$.

x	-4		$-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$		$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-1{,}29$	$\nearrow$	$-4{,}73$	$\searrow$	$-5{,}27$	$\nearrow$	119

D'après ce tableau de variations l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur $\left[\dfrac{\sqrt{6}}{6}\,;4\right]$.

B. Cas général avec un algorithme

1. $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

2. Les coordonnées du point X_1 vérifient l'équation précédente, donc :

$0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0)$

$\Leftrightarrow x_1 - x_0 = -\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Leftrightarrow x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

4. Avec $x_0 = 5$, on obtient $x \approx 5{,}4798$.

En autonomie p. 167

Étudier une fonction

111. d **112. c** **112. b** et **d**

114.

x	$-\infty$ $-\frac{1}{3}$ 2 $+\infty$
$f'(x) = 6x^2 - 10x - 4$	$+$ 0 $-$ 0 $+$
Variations de f	↗ ↘ ↗

115. $h'(x) = -2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{1-2x}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-2x}}$.

On en déduit que $h'(x) < 0$ sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$.

Donc h est décroissante sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$.

116. 1. $g'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2+1)^2}$. Le dénominateur est « un carré » donc positif sur $\mathbb{R}$. $g'(x)$ est donc du signe du numérateur $-4x$. Or $-4x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$. Donc $g'(x)$ est négatif si et seulement si x est positif et $g'(x)$ est positif si et seulement si x est négatif. On en déduit que g est croissante sur $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. La tangente $\mathcal{T}$ a pour équation

$y = g'(-1)(x-(x-(-1)) + g(-1)$, c'est-à-dire $y = x + 2$.

3. $$g(x) - (x+2) = \frac{-x^3 - 2x^2 - x}{x^2+1} = \frac{-x(x^2+2x+1)}{x^2+1} = \frac{-x(x+1)^2}{x^2+1}$$

Or, pour tout réel x, $x^2 + 1 > 0$ et $(x+1)^2 \geqslant 0$. Donc le signe sur $\mathbb{R}$ de $g(x) - (x+2)$ est le même que celui de $-x$. Donc $g(x) - (x+2) \geqslant 0$ sur $]-\infty\,;0]$ et $g(x) - (x+2) \leqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$. Ainsi la courbe $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de la tangente $\mathcal{T}$ sur $]-\infty\,;0]$ et $\mathscr{C}_g$ est en dessous de $\mathcal{T}$ sur $[0\,;+\infty[$.

117. Sachant que f est décroissante sur $\mathbb{R}$ alors $f'(x)$ est négative sur $\mathbb{R}$.

Or $f'(x) = -3x^2 + 2bx - 4$ est un polynôme du second degré ayant pour discriminant $\Delta = 4b^2 - 48$. $f'(x)$ est négatif (signe de $a = -3$) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\Delta \leqslant 0$, c'est-à-dire si $4b^2 - 48 \leqslant 0$, ce qui donne $b^2 \leqslant 12$ et donc $b \in [-2\sqrt{3}\,;2\sqrt{3}]$.

Optimiser une fonction

118. d **119. b**

120. À 8 h 00 l'altitude maximale, 24 km, est atteinte.

x	0 1 $1{,}7$
$h'(x) = -36x^2 + 36$	$+$ 0 $-$
Variations de h	↗ 24 ↘

121. Soit V le volume de la pyramide, h sa hauteur et x la longueur du côté du carré de base.

Alors $V = \frac{1}{3}x^2h$. D'après le théorème de Pythagore, et sachant que la diagonale du carré mesure $x\sqrt{2}$, on a $h^2 + \left(\dfrac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 5^2$. On en déduit $x^2 = 50 - 2h^2$. Donc $V(h) = \dfrac{50}{3}h - \dfrac{2}{3}h^3$. Puis, en dérivant, $V'(h) = \dfrac{50}{3} - 2h^2$.

En étudiant le signe de $V'(h)$ sur l'intervalle $[0\,;5]$, on trouve que le volume maximum est atteint pour $h = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

CHAPITRE 6 Fonction exponentielle

Manuel p. 168

I. Introduction

Objectifs du chapitre

L'objectif de ce chapitre est d'introduire l'étude de la fonction exponentielle.

Il permet de réinvestir les outils permettant les études de fonction vues dans les chapitres précédents : dérivation, étude de variation. Cela permet de diversifier les études de fonctions, sans excès de technicité.

Ce chapitre est aussi l'occasion d'approfondir le travail sur les démonstrations et de s'appuyer dessus pour construire une nouvelle fonction avec des propriétés algébriques remarquables.

Enfin, le lien est fait entre fonction exponentielle et suite géométrique. Un exemple illustratif est l'étude de la décroissance exponentielle d'un amas de noyaux radioactifs.

Les activités d'introductions permettent d'introduire la fonction exponentielle, de démontrer plusieurs propriétés algébriques, de faire le lien entre suite géométrique et fonction exponentielle.

Capacités

- → Calculer avec la fonction exponentielle.
- → Résoudre des équations ou inéquations avec la fonction exponentielle.
- → Calculer des dérivées.
- → Étudier le sens de variation de la fonction exponentielle.

II. Corrigés des activités et exercices

Pour prendre un bon départ p. 169

1. Calculer avec les puissances

1. a) 3^{n+2} **b)** $\frac{1}{x}$ **c)** 3^7 **d)** a^5

2. Résoudre une inéquation

a) $x \in]-2\,;+\infty[$

b) $x \in]-1\,;1[$

c) $x \in \left[\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$

d) $x \in \left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right[$

e) Il n'y a pas de solution.

f) $x \in]-\infty\,;1[$

3. Factoriser

a) $x(3 - x^2)$

b) $(3 - x)(3 + x)$

c) $(x + 1)(\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x)$

d) $(2x - 1)^2$

4. Dériver

a) $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

b) $g'(x) = 4(2x - 5)$

c) $h'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$

d) $k'(x) = -\frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 9)^2}$

e) $m'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$

f) $n'(x) = 12(4x - 1)^2$

5. Déterminer une équation de tangente

1. Une équation est $y = 2x - 1$.

2. Une équation est $y = 1$.

6. Travailler avec les suites géométriques

1. Sa raison est 2 et son terme initial est $V_0 = 3$.

2. $S = 2 \times \dfrac{1 - 0{,}25^{11}}{0{,}75}$.

7. Relier évolution et suite géométrique

a) La raison est $\dfrac{1}{3}$.

b) La raison est de 1,1.

c) La raison est de 1,3.

d) La raison est de 0,25.

Activités p. 170-171

Activité 1. Condition de croissance d'une population

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Introduire l'équation fonctionnelle qui caractérise la fonction exponentielle.

1. b) On retrouve les mêmes valeurs dans les deux lignes : $N(t + 1) - N(t) = N(t)$.

2. b) Il semble que $N(t + 0{,}1) - N(t) = 0{,}1 \times N(t)$.

3. On retrouve la même conjecture : $N(t + 0{,}01) - N(t) = 0{,}01 \times N(t)$.

Il semble que $N' = N$.

Activité 2. Construction graphique de la fonction exponentielle

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Construire une approximation de la courbe de la fonction exponentielle à l'aide de la méthode d'Euler.

3. a) Le nième a une abscisse de $n \times \dfrac{1}{n} = 1$ et une ordonnée de 1 multiplié par $1 + \dfrac{1}{n}$ « n fois » donc de $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

c) u_n semble converger vers un nombre réel ; sa limite serait $e \approx 2{,}72$.

Activité 3. Exponentielle d'une somme

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Démontrer une propriété algébrique de la fonction exponentielle.

a) $f'(x) = \dfrac{1}{\exp(b)} \times 1 \times \exp'(x + b)$

$= \dfrac{1}{\exp(b)} \exp(x + b) = f(x)$

b) $f(0) = \dfrac{1}{\exp(b)} \exp(0 + b) = 1$

c) f vérifie donc les deux propriétés qui caractérisent la fonction exponentielle, donc $f(x) = \exp(x)$ et $\exp(x + b) = \exp(x) \times \exp(b)$.

Activité 4. Exponentielle et puissance

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Démontrer une propriété algébrique de la fonction exponentielle.

A. Étude du cas particulier où $a = 2$

1. $u_{n+1} = \exp(2(n + 1)) = \exp(2n + 2) = \exp(2) \times \exp(2n)$
$= \exp(2)u_n$

(u_n) est géométrique de raison $\exp(2)$ et de premier terme $u_0 = 1$.

2. $u_n = \exp(2)^n$

3. Cela découle des deux questions précédentes.

B. Cas général

$u_{n+1} = \exp(a(n + 1)) = \exp(an + a) = \exp(a) \times \exp(an)$
$= \exp(a)u_n$.

(u_n) est géométrique de raison $\exp(a)$ et de premier terme $u_0 = 1$, donc $u_n = \exp(a)^n$, ce qui démontre la propriété.

Activité 5. Exponentielles et suite

- **Durée estimée :** 35 min
- **Objectif :** Étudier le lien entre suite géométrique et fonction exponentielle.

1. a) Augmenter de 1,6 % revient à multiplier par 1,016 donc (u_n) est géométrique de raison 1,016 et de terme initial $u_0 = 1\,864$.

b) $u_n = u_0 \times q^n = 1\,864 \times 1{,}016^n$

2. a) Il semble y avoir une seule solution.

b) $e^a = 1{,}016$ donc $u_n = 1864 \times (e^a)^n = 1864 \times e^{na}$.

3. a) Il semble n'y avoir qu'une solution.

b) $V_n = V_0 \times e^{na}$.

À vous de jouer p. 176

1. a) e **b)** e^6 **c)** $e^{2x} - 1$
d) 1 **e)** $e^{2x} + 2e^x + 1$ **f)** $e^{2x} - 2 + e^{-2x}$

2. a) $\frac{x}{e^4}$ **b)** e^{2x+1} **c)** e^{5x}
d) e^{-2x} **e)** e^x **f)** e^{-5x}

3. a) $e^4 - 2e^3 + e^2$ **b)** $-e^5 + 2e^3 - e$
c) $1 + e^3$ **d)** $1 + e^3$
e) $e^8 - 2 + e^{-8}$ **f)** $1 - e^6$

4. a) $e^{-x+5} + e^{-x+1}$ **b)** $-e^{2x} + e^x - e^{-x} + 1$
c) $e^{2x} + 2e^x + 1$ **d)** $1 + e^{5x}$
e) $e^{-2x} + 2 + e^{2x}$ **f)** $e^2 - e^{2x}$

5. a) $e(e - 4)$ **b)** $(e^2 - 1)(e^2 + 1)$
c) $e(1 - e^2)$

6. a) $e^x(e^{2x} - 1)$ **b)** $e^{2x}(1 - e^{2x})$
c) $2e^x(e^x - 2)$

7. a) e **b)** 1 **c)** e^6
d) $e^{2x} + 2e^x + 1$ **e)** $e^{2x} - 1$ **f)** $e^{2x} - 2 + e^{-2x}$

8. a) $2 + 3e^x - 2e^{-x} - 3$ **b)** $1 - 2e^{-x} + e^{-2x}$
c) $x^2 - e^{-2x}$ **d)** $12x + 3xe^x + e^{-x} + 1$
e) $e^{-6x} - 1$ **f)** $4e^{2x} - 4e^{x-1} + e^{-2}$

9. a) $e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$
b) $e^x = e^{-1} \Leftrightarrow x = -1$
c) $e^x - e = 0 \Leftrightarrow e^x = e^1 \Leftrightarrow x = 1$

10. a) $x = -2$ **b)** $x = \frac{5}{3}$ **c)** $x = 1$ ou $x = -1$.

11. a) $x \in]1\,;+\infty[$ **b)** $x \in \mathbb{R}$ **c)** $x < -2$

12. a) $x > -\frac{1}{3}$ **b)** $x \in \left]-\infty\,; -\frac{3}{2}\right]$
c) Il n'y a pas de solution.

13. a) $x = 0$ **b)** $x = \frac{1}{3}$ **c)** $x = 1$

14. a) $x \in \left]\frac{7}{5}\,;+\infty\right[$ **b)** $x \in]4\,;+\infty[$
c) $x \in]-\infty\,;-0{,}5[$

15. a) Il n'y pas de solution.
b) $x = -1$ **c)** $x = 3$

16. a) $x \in]2\,;+\infty[$ **b)** $x \in \left]-\infty\,;\frac{5}{8}\right]$ **c)** $x \in [3\,;+\infty[$

17. a) $x = -2$ ou $x = 0$.
b) $x = -1$ **c)** $x = 2$

18. a) $x = -1$ ou $x = 1$ou $x = \frac{3}{2}$.
b) $x = 3$ **c)** $x = 0$ ou $x = -4$

19. a) $x = \frac{1}{3}$ **b)** $x = 0$
c) $x = \frac{2}{5}$ **d)** $x = 0$ ou $x = 2$.

20. a) Il n'y a pas de solution.
b) $x = \frac{1}{2}$ **c)** $x = 3e$ **d)** $x = 0$

21. a) $e^{x^2-5x} > 0$ pour tout réel x.
b) $e^{x+2} > 0$ pour tout réel x d'où $-2e^{x+2} < 0$.
c) $e^{x+3} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x+3} > e^0 \Leftrightarrow x + 3 > 0$
$\Leftrightarrow x > -3$
$e^{x+3} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x+3} = e^0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.
On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$e^{x+3} - 1$		$-$	0	$+$	

d) $e^{-x+7} - e > 0 \Leftrightarrow e^{-x+7} > e^1 \Leftrightarrow -x + 7 > 1$
$\Leftrightarrow x < 6$
$e^{-x+7} - e = 0 \Leftrightarrow e^{-x+7} = e^1 \Leftrightarrow -x + 7 = 1 \Leftrightarrow x = 6$
On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$e^{-x+7} - e$		$+$	0	$-$	

e) $e^x - e^{2x+3} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{2x+3} \Leftrightarrow x > 2x + 3$
$\Leftrightarrow x < -3$
$e^x - e^{2x+3} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{2x+3} \Leftrightarrow x = 2x + 3 \Leftrightarrow x = -3$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$e^x - e^{2x+3}$		$+$	0	$-$	

f) $e^4 - e^{5x} > 0 \Leftrightarrow e^4 > e^{5x} \Leftrightarrow 4 > 5x$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5} > x$$

$e^4 - e^{5x} = 0 \Leftrightarrow e^4 = e^{5x} \Leftrightarrow 4 = 5x \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{5}$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
$e^4 - e^{5x}$		$+$	0	$-$	

22. a) $e^{6x+3} + 1 > 0$ pour tout reel x.

b)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$2e^2 - 2e^{-4x+1}$		$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$3 - 3e^{-5x+1}$		$-$	0	$+$	

23. a) $e^x + 1 > 0$ pour tout reel x.

b)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-3xe^x$		$+$	0	$-$	

c)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$e^{6x+2} - 1$		$-$	0	$+$	

24. a)

x	$-\infty$		$\frac{7}{4}$		$+\infty$
$e^{x+1}(4x - 7)$		$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$xe^x - x$		$+$	0	$-$	

c) $4x^2 + 4e^{2-x}$ est positif pour tout réel x.

25. a) $x \in]-\infty ; 0[\cup]7 ; +\infty[$

b) $x \in]-\infty ; -2[\cup]3 ; +\infty[$

c) $x \in \mathbb{R}+$

26. a) $x \in]0 ; 3[$

b) $x \in [0 ; 5]$

c) $x \in \mathbb{R}+$

27. a) $f'(x) = -e^{-x}$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ donc $f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) $g'(x) = 4 \times (-5) \times e^{-5x+5} = -20e^{-5x+5}$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{-5x+5} > 0$ donc $g'(x) < 0$ et g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) $h'(x) = -(-2) \times e^{-2x+3} = 2e^{-2x+3}$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x+3} > 0$ donc $h'(x) < 0$ et h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

28. a)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		↘	0	↗	

b)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g		↘	1	↗	

c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h		↘	2	↗	

29. a)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f		↘	‖	↘	e	↗	

b) g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) h est croissante sur $\mathbb{R}$.

d)

x	$-\infty$		-5		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
k		↘	‖	↘	$-\frac{3\mathrm{e}}{7}$	↗	

30. a)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f		↘	$-\mathrm{e}^{-1}$	↗	

b)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g		↘	-1	↗	

c)

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f		↗	$4\mathrm{e}^{-1}$	↘	0	↗	

d)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
k		↗	$4\mathrm{e}^{-1}$	↘	

31. a) f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

b)

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
g		↘	$-\mathrm{e}^{-2}$	↗	

c)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
h		↗	$4\mathrm{e}^{-1}$	↘	

d) k est décroissante sur $\mathbb{R}$.

32. a) f est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

b)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
g		↗	e^{6}	↘	

c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h		↘	7	↗	

d) k est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercices d'application p. 180-181

Apprendre à apprendre

33. $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^{a} \times \mathrm{e}^{b}$

$\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^{a}}{\mathrm{e}^{b}}$

$(\mathrm{e}^{a})^{n} = \mathrm{e}^{an}$

34. $x \longmapsto a\mathrm{e}^{ax+b}$

35. Il est strictement positif.

Questions – Flash

36. a) e^{-x-2} **b)** e^{-3} **c)** $-\mathrm{e}^{4}$

37. a) $f'(x) = 3 + e^x$
b) $g'(x) = 2e^x$
c) $h'(x) = -2(x+1)e^x$
d) $k'(x) = 2e^{2x-4}$
e) $m'(x) = (1-x)e^{-x}$
f) $n'(x) = \dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$

38. a) $x = 2$ **b)** $x = 4$ **c)** $x = 2$

39. a) $x \in]-1\ ;+\infty[$ **b)** $x \in [1\ ;+\infty[$
c) $x \in]0\ ;+\infty[$

40. a) Oui, de raison e.
b) Oui, de raison e^4.
c) Non.

41. a) La courbe représentant *f* est $\mathscr{C}_3$.
b) La courbe représentant *g* est $\mathscr{C}_2$.
c) La courbe représentant *h* est $\mathscr{C}_1$.

Calcul algébrique

42. a) exp(9) **b)** exp(4) **c)** exp(– 6)
d) exp(3) **e)** exp(– 2) **f)** exp(2)
g) exp(12) **h)** exp(– 10)

43. a) e^{-1} **b)** $e^{-0,5}$ **c)** e^{11}
d) $\dfrac{e^{-12}}{8}$ **e)** e^5 **f)** e^{13}

44. a) $e^4 + e^{-4} + 2$ **b)** e^9 **c)** $e^4 - 1$

45. $A(x) = e^{4x-1}$ $B(x) = e^{-2}$ $C(x) = e^{6x}$

46. $A(x) = 1 - e^x$ $B(x) = e^{-3x}$ $C(x) = \dfrac{e^{2x}}{4}$

47. $D(x) = e^{x+1}$ $E(x) = e$ $F(x) = e^{-9x+1}$

Résoudre des équations

48. a) $e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$
b) $e^x = e^{-1} \Leftrightarrow x = -1$
c) $e^x > 0$ pour tout réel x donc il n'y a pas de solution.
d) $e^x > 0$ pour tout réel x donc il n'y a pas de solution.

49. a) $x = 1$ **b)** $x = 2$ **c)** $x = 5$

50. a) $x = -2$ **b)** $x = 0$ **c)** $x = \dfrac{1}{2}$

51. a) $x = 0$ **b)** $x = \dfrac{3}{2}$
c) Il n'y a pas de solution.

Résoudre des inéquations

52. a) $e^x \leqslant 1 \Leftrightarrow e^x \leqslant e^0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$
b) $e^x > e \Leftrightarrow e^x > e^1 \Leftrightarrow x > 1$
c) $e^x > 0$ pour tout réel x donc l'ensemble des nombres réels est solution.
d) $e^x > 0$ pour tout réel x donc il n'y a pas de solution.

53. a) $x \in]-\infty\ ;-2[$ **b)** $x \in]0\ ;+\infty[$
c) $x \in [-2\ ;+\infty[$

54. a) $x \in \left]\dfrac{5}{3}\ ;+\infty\right[$ **b)** $x \in [0\ ;+\infty[$
c) $x \in]-\infty\ ;0,5[$

55. a) $x \in]5\ ;+\infty[$ **b)** $x \in]-\infty\ ;6[$
c) $x \in \left]-\infty\ ;-\dfrac{1}{3}\right]$

56. a) $e^{x+1} > 0$ pour tout réel x
b) $e^{5x-7} > 0$ pour tout réel x donc $-2e^{5x-7} < 0$ pour tout réel x
c) $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$
$e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$
On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		–	0	+	

57. a)

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$e^{x+3} - e$		–	0	+	

b)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-e^{6-x} + 1$		–	0	+	

c)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$e^{2x} - e^{-1}$		$-$	0	$+$	

58. a)

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$3 - 3e^{-x+2}$		$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$-2 + 2e^{-2x+4}$		$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$e^{3x+1} - e^{5+x}$		$-$	0	$+$	

Calculer des dérivées

59. a) $f'(x) = e^x - 2$

b) $g'(x) = 4e^x$

c) $h'(x) = -\dfrac{e^x}{(e^x)^2} = -\dfrac{1}{e^x}$

60. a) $f'(x) = 3e^{3x+1}$

b) $g'(x) = e^{x+2}$

c) $h'(x) = 8e^{-4x}$

61. a) $f'(x) = (x+1)e^x$

b) $g'(x) = e^x(x+3)$

c) $h'(x) = -e^{-x} + 2x - 2$

Étude de variation

62. a) $f'(x) = 2e^{2x}$ et $f'(x) > 0$ pour tout réel x donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) $g'(x) = -e^{-x}$ et $g'(x) < 0$ pour tout réel x donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) $h'(x) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$ et $h'(x) > 0$ pour tout réel x donc h est croissante sur $\mathbb{R}$.

d) $k'(x) = -5e^{-5x}$ et $k'(x) < 0$ pour tout réel x donc k est décroissante sur $\mathbb{R}$.

63. a) $f'(x) = 6e^{-3x}$

f est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) $g'(x) = 1 - e^x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g		↗	-1	↘	

c) $h'(x) = -8e^{-2x} + 8e$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
h		↘	5	↗	

d) $k'(x) = -8e^{-2x} + 8e$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
k		↘	4	↗	

64. 1. $f'(x) = xe^x$

2.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
k		↘	4	↗	

Calculs et automatismes

65. a) $\dfrac{1}{2}$ **b)** 625 **c)** $\dfrac{4}{10}$

66. a) $e^{2x} + 2 + e^{-2x}$

b) $-14 - 5e^{-2x} + 3e^{2x}$

c) $e^{2x} - 9$

67. a) e^x

b) $-2e^{-x} + 1$

c) $-20e^{5x+1}$

d) $-x(x+1)e^x$

Exercices d'entraînement p. 182-186

Propriétés algébriques

68. a) $e^{0,5}$ **b)** $e^{5,5}$ **c)** $e^{1,5}$

69. a) 4 **b)** $e^5x - 2e^x + 3e^{-x}$ **c)** $-2e^{4x-2} - e^{2x-4}$

70. $A(x) = e^2x - 2 + e^{-2x}$

$B(x) = e^x - 1$

$C(x) = e^x - 2e^{\frac{x}{2}} + 1$

71. a) $e^4 + e^{x+5}$

b) $4e^{-2x} + 4e^{-x+1} + e^2$

c) $4e^{-4x} - 1$

72. $A(x) = (x-1)e^x$

$B(x) = e^{-2x}(x+1)$

$C(x) = (e^{-x} - 1)^2$

73. $A(x) = x(e^x - 5)$

$B(x) = e^5x(x+2)$

74. $A(x) = (e^x - 2x)(e^x + 2x)$

$B(x) = (e^x + 1)^2$

$C(x) = (e^x + e^{-x})^2$

Résolution d'équations ou d'inéquations

75. 1 . a) $x = 3$

b) $e - e^{x-2} = 0 \Leftrightarrow e^{x-2} = e^1 \Leftrightarrow x = 3$

2. a) $x \in \mathbb{R}^*$

b) $x \in \mathbb{R}^*$

76. a) Il n'y a pas de solution.

b) $x = \sqrt{6}$ ou $x = -\sqrt{6}$

c) $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{3}$

77. a) $x = -1$

b) Il n'y a pas de solution.

c) $x = 2$

78. a) $x = 3$ **b)** $x = 0$ **c)** $x = 0$

79. a) Il n'y a pas de solution.

b) $x \in]-6\ ;\ 1[$

c) $x \in \mathbb{R}^*$

80. a) $x \in]-\infty\ ;\ 3[$

b) $x \in [-1\ ;\ 1]$

c) $x \in \left]-\frac{1}{2}\ ;\ 0\right[$

Études de signes

81. a)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2e^x		+	0	−	

b) Pour tout reel x, on a $-3e^{5-x} < 0$.

c)

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$(x^2+1)(e^x-1)$		+	0	−	0	+	

d)

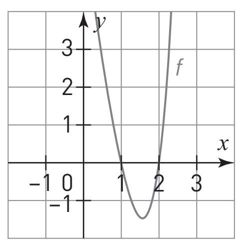
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x^2e^{x^2+1}$		−	0	+	

e) Pour tout reel x, on a $4e^{-x^2} > 0$.

f)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$e^{2x} - 3xe^{2x}$		+	0	−	

82. 1.



2.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$(x-1)(e^x - e^2)$		+	0	−	0	+	

83. 1. $\mathscr{C}_1$ représente f ; $\mathscr{C}_2$ représente k ; $\mathscr{C}_3$ représente g et $\mathscr{C}_4$ représente h.

2. Pour tout reel x, on a $f(x) > 0$; $h(x) < 0$ et $k(x) < 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

84. 1.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$x^2 + 3x - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^{2x} + 3e^x - 4$		$-$	0	$+$	

85. a) $x \in \mathbb{R}$ **b)** $x \in]-\infty\ ;-2]$

c) $x \in \mathbb{R}^+$ **d)** $x \in \left]\dfrac{e^2}{3}\ ;+\infty\right[$

e) $x \in]-1\ ;1[$ **f)** $x \in \left]-\infty\ ;\dfrac{3}{e}\right[$

Dérivée et exponentielles

86. a) $e^x - 3$ **b)** $(x^2 + 2x)e^x$

c) $-6e^{-3x+1} - 3$ **d)** $(3x + 4)e^{3x+1}$

87. a) $-\dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2}$ **b)** $4e^x$

c) $\dfrac{x}{e^x}$ **d)** $-\dfrac{2e^x}{(e^x - 1)^2}$

88. a) $3(x + 1)e^x$ **b)** $\dfrac{e^x(x - 1)}{x^2} - 1$

c) $-\dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2}$ **d)** $\dfrac{e^x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}e^x$

e) $e^{-x}(1 - x)$ **f)** $-\dfrac{10e^{2x}}{(e^{2x} - 3)^2}$

g) $\dfrac{9e^x}{(e^x + 1)^2}$

89. $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

90. 1. $f'(x) = ke^{k}x - k$

2. $f'(0) = k - k = 0$ donc cette tangente est horizontale.

3. $k = 0$

91. 1. $f'(0) = 2$

2. a) $f'(x) = ke^{kx}$

b) $k = 2$

92. 1. $a = e$ et $b = -3e$

2.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
f		$\nearrow$	e^{-3}	$\searrow$	

3. $y = 4ex - 3e$

93. $y = -e^{-5}$

Étude de fonctions

94. a) f est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) g est croissante sur $\mathbb{R}$.

c)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
h		$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	

e) k est décroissante sur $\mathbb{R}$.

95. a)

x	$-\infty$		$\dfrac{14}{5}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	$\dfrac{1}{5}e^{15}$	$\searrow$	

b)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
g		$\nearrow$	-15	$\searrow$	

c) h est croissante sur $\mathbb{R}$.

d) k est croissante sur $\mathbb{R}$.

96. a) f est croissante sur $\mathbb{R}$.

b)

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
g		↘	$-27e^{-3}$	↗	

c) h est croissante sur $\mathbb{R}$.

d)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
k		↗	-2	↘	

97. 1.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f		↗	$2{,}2$	↘	2	↗	

2.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f		↗	$5e^{-1}$	↘	2	↗	

3. $y = 4ex + 2e$

98. 1. $f'(x) = -2e^{-x} + 2$

2.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘	$2 - e^{-1}$	↗	

3. $y = (-2e^{-1} + 2)x + 3e^{-1}$ et $y = 2 - e^{-1}$

99. 1. $f'(x) = e^{x-1}$

2. f est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Ils ont pour coordonnées $(2 ; 0)$ et$(0 ; e^{-1} - e)$.

100. 1. Si $k = 0$, f est constante sur $\mathbb{R}$.

Si $k > 0$, f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $k < 0$, f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. $f_k(1) = 1$ donc toutes les courbes passent par le point de coordonnées$(1 ; 1)$.

101. 1. $f'(x) = \dfrac{6e^x}{(e^x + 3)^2}$

2. f est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout reel x, on a $e^x > 0$ donc $e^x + 3 > 0$ et $f(x) > 0$.

De plus, $f(x) - 2 = -\dfrac{6}{e^x + 3} < 0$ donc $0 < f(x) < 2$ pour tout reel x.

102. 1. $f'(x) = (-9x^3 + 12x)e^{-x} - (-3x^3 + 6x^2)e^{-x}$
$= 3x(-x^2 + 5x - 4)e^{-x}$

2.

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
f		↘	0	↗	$3e^{-1}$	↘	$-96e^{-1}$	↗	

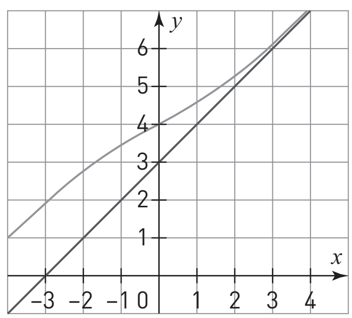
103. 1. $f'(x) = \dfrac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$

2. f est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Non.

4. $f(x) - y = \dfrac{2}{e^x + 1} > 0$ donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de d.

5.



104. 1. Il a pour coordonnées $(0 ; e - 1)$.

2. $f'(x) = \dfrac{-e^x + e}{e^x}$

3.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		↗	-1	↘	

$\mathscr{C}_f$ est en dessous de d.

105. 1. $f'(0) = k$

2. Pour g, $k = \frac{1}{2}$ et pour h, $k = -1$.

Exponentielle et suite

106. a) (u_n) est géométrique de raison e.

b) (v_n) est géométrique de raisone e^{-6}.

c) (w_n) est géométrique de raison e^3.

d) (r_n) est arithmétique de raison e^2.

107. Les suites (u_n), (w_n) et (r_n) sont croissantes et (v_n) est décroissante.

108. a) (u_n) est croissante.

b) (u_n) est décroissante.

c) (u_n) est croissante.

d) (u_n) est croissante.

109. 1. C'est le cas en posant $u_n = e^n$.

2. $S = \dfrac{1 - e^{n+1}}{1 - e}$

3. $n = 21$

110. a) $S = \dfrac{1 - e^{2n+2}}{1 - e^2}$

b) $S = \dfrac{1 - e^{0,5n+0,5}}{1 - e^{0,5}}$

111. a) $S \approx 234,20$

b) $S \approx 11,57$

112. 1. $\mathscr{C}_1$ représente f ; $\mathscr{C}_2$ représente g et $\mathscr{C}_3$ représente h.

2. a) Elle semble être 0.

b) Elle semble être $+\infty$.

c) Elle semble être $+\infty$.

113. 1. Il est de 31,5 euros.

2. 0,9

3. $u_n = 35 \times 0,9^n \approx 35 \times e^{-0,10536n}$.

4. Non

Modélisations

114. 1. $R(x) = 3x$

2. Ils sont de 350 euros.

3. a) $\mathscr{C}$ représente C et $\mathscr{C}'$ représente R.

b) Pour 4,2 tonnes.

c) Il est de 1 283 euros.

d) C' est le cas pour $x \in [2,8 ; 13,3]$.

115. 1. Elle est de 15,1 $\mu g \cdot L^{-1}$.

2. Elle est de 10,05 $\mu g \cdot L^{-1}$.

3. Il faut attendre 3,5 h environ.

116. 1. Elle est de 40.

2. Cela aura lieu 5 ans après l'introduction.

3. Non, la population explose alors qu'il existe une limite physique à la taille de la population.

117. 1. Elle est de N_0.

2. $k = \dfrac{1}{19}$

3. Ce sera le cas au bout de 44 jours.

118. 1. $4\,828 = C \times e^{35k}$ et $3\,787 = C$.

2. $C = 3\,787$ **3.** $k \approx 0,007$

4. a) Elle serait de 4 031 milliers.

b) En 1971.

c) L'erreur est de $\dfrac{6\,694 - 6\,113}{6\,113} \approx 9,5$ %.

119. 1. $f(0) = 0$

2. a) $f'(t) = \dfrac{0,6e^{0,1t}}{(e^{0,1t} + 1)^2}$

b) f est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Non.

120. 1. $f'(0) = 1000k$

2. $k \approx 0,0198$

Travailler autrement

121. f définie par $f(x) = -\frac{3}{2}e^{2x+1}$.

122. À l'aide des équations de tangentes, on trouve $P(a - 1 ; 0)$ et $Q(a + 1 ; 0)$ d'où $PQ = 2$.

Exercices bilan p. 187-189

123. Une étude complete

1. a)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

b) $\mathscr{C}_f$ est en dessous de l'axe des abscisses sur $]-\infty\ ;\ 3[$ et au-dessus sinon.

c) $(3\ ;\ 0)$ et $(0\ ;\ -3e^2)$.

2. a) $f'(x) = (x-2)e^{x+2}$

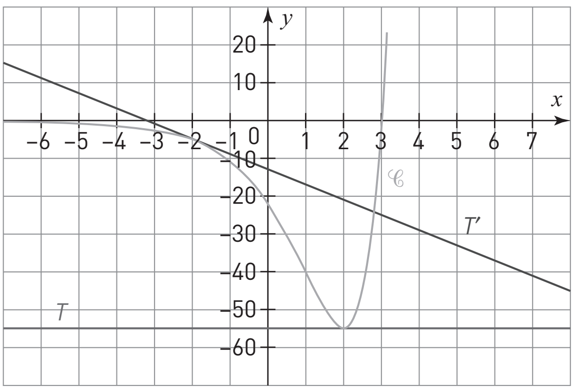
b)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	↘	$-e^{-4}$	↗

3. a) $y = -e^4$

b) $y = -4x - 13$

4.



124. Chacun sa courbe

1. f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 2]$ et croissante sur $[2\ ;\ +\infty[$.

g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

h est croissante sur $\mathbb{R}$.

k est décroissante sur $]-\infty\ ;\ -1]$ et croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

2. $\mathscr{C}_1 : g$ $\quad$ $\mathscr{C}_2 : f$

$\mathscr{C}_3 : k$ $\quad$ $\mathscr{C}_4 :$ h

125. Fonction inconnue

1. $f(0) = 2$ donc $b = 2$. $f(-2) = 0$ donc $a = -1$.

2.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f	↗	e	↘

126. Conjecturer ne suffit pas

1. a)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	-2	↗

b) Il semble y en avoir deux, -3 et 1,5.

2. a) $f'(x) = e^x - 1$

b) On retrouve bien les mêmes variations.

3. a) $-2{,}94$

b) C'est une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution negative de $f(x) = 0$.

c)

```
from math import *
x=1
f=e**x-x-3
while f<0:
    x=x+0.0001
    f=e**x-x-3
print(x)
```

127. Étude d'une fonction (1)

1. $D_f = \mathbb{R}^*$

2. f est croissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$.

3. Il n'y en a pas.

128. Avec une fonction auxilliaire (1)

1. $f'(x) = xe^x - e^x + 1$.

2. a)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g	↘	0	↗

b) g a pour minimum 0 d'après ses variations.

3. $(x-1)e^x + 1 = f'(x)$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

129. Étude d'une fonction (2)

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ et $f(x) + f'(-x) = 0$ donc f est impaire. L'origine du repère est donc un centre de symétrie de la courbe.

2. f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de d.

130. Avec une fonction auxilliaire (2)

A. 1. $g'(x) = -1 + e^x$

2.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
g	$\searrow$	0	$\nearrow$

3. On en déduit que $g(x) \geqslant 0$.

B. 1. $f'(x) = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}g(x)$.

2. On déduit de ce qui précède que $f'(x) \geqslant 0$ et que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. $y = 2x + 1$.

131. À la recherche d'une fonction

1. La situation 1 convient.

2. $y = x + 2$

3. a) $f(0) = 2$ donc $b = 1$.

b) $f'(x) = -e^x + a$ et $f'(0) = 1$ donc $a = 2$.

132. Construction d'un portail

A. 1. a) $f'(x) = -4xe^{-4x}$

b) f est décroissante sur $[0 ; 2]$.

2. $f(0) = 1,5$ donc $b = 1,25$.

B. 1. $A_k = (f(0,17k) - 0,05) \times 0,12$

2.

```
s=0
X=0
while X+0.17<2:
    s=s+0.12*((X+0.25)*e**(-4*X)+1.25)-0.05)
    X=X+0.17
print(s)
```

133. Concentration d'un medicament

A. 1. C est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. Non, f semble tendre vers 12.

B. 1. $f'(x) = \dfrac{105g(x)}{x^2}$

2. D'après le tableau de variation, $g(x) \leqslant 0$ donc $f'(x) \leqslant 0$ et f est décroissante sur $\mathbb{R}+$.

134. Maths et randonnée

A. 1. 580 m.

2. 8,5 km.

3. Non.

B. 1. $f'(x) = (150 - 6x^2)e^{-0,02x^2}$

2.

x	0		5		12
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	300	$\nearrow$	755	$\searrow$	400

3. Elle sera de 755 m.

Exercices d'approfondissement p. 190-191

135. Ensemble de definition

a) $\mathbb{R}^*$ **b)** $\mathbb{R}\backslash\{-1 ; 1\}$ **c)** $\mathbb{R}$

d) $\mathbb{R}\backslash\{4\}$ **e)** $\mathbb{R}_+^*$ **f)** $]-\infty ; 1[$

136. Factorisations

a) $(x + e^{3x})^2$

b) $(e^{\frac{x}{2}} - 2x)(e^{\frac{x}{2}} + 2x)$

c) $(e^{\frac{x}{2}} - 1)(e^{\frac{x}{2}} + 1)$

137. Des limites

a) (u_n) tend vers $+\infty$.

b) (u_n) tend vers 0.

c) (u_n) tend vers $+\infty$.

d) (u_n) tend vers 0.

138. Suites et algorithmes

1. $u_4 = 1$

2. (u_n) est géométrique de raison $e^{\frac{1}{4}}$.

3. (u_n) est croissante sur $\mathbb{R}$.

4. Sa limite est $+\infty$.

5.

```
from math import*
n=0
u=e**(n/4-1)
while u<10**9:
    n=n+1
    u=e**(n/4-1)
print(n)
```

139. Changements de variable (1)

1. $x = 1$ ou $x = 0$ ou $x = -3$.

2. a) $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$

b) $x = 0$

140. Changements de variable (2)

1. $x = 1$ ou $x = -5$

2. $x = 0$

3. a) $x = 0$ **b)** $x = 0$ **c)** $x = 0$

141. Du calcul formel à la rescousse

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f		$\searrow$	e^{-1}	$\nearrow$	

142. Une equation

L'équation revient à $x^2 - 2x + 3 = 0$, qui n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

143. Dichotomie

1. $x \approx 0{,}7$.

2. a)

Passage dans la boucle	a	b	c	e^c
1	0	1	0,5	1,65
2	0,5	1	0,75	2,11
3	0,5	0,75	0,625	1,66
4	0,625	0,75	0,6875	1,99

b) Il renvoie 0,6953125.

c) Il suffit de remplacer 0,01 par 0,0001.

144. Fonctions hyper

1. a) cosh est définie sur $\mathbb{R}$ et $\cosh(-x) = \cosh(x)$ donc cosh est paire.

b) cosh est croissante sur $[0\ ; +\infty[$.

c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

2. sinh est définie sur $\mathbb{R}$ et $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ donc sinh est impaire.

sinh est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. $\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$

4. $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$

5. $2\sinh(x)\cosh(x) = \sinh(2x)$.

145. Des demonstrations

a) $\exp(a - b) = \exp(a) \times \exp(-b)$

$$= \exp(a) \times \frac{1}{\exp(b)} = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

b) $\left(\sqrt{\exp(e)}\right)^2 = \exp(e)$ et $\left((\exp e)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \exp(e)$

Or $\sqrt{\exp(e)} > 0$ et $(\exp e)^{\frac{1}{2}} > 0$.

Donc $\sqrt{\exp(e)} = (\exp e)^{\frac{1}{2}}$.

146. Une autre caractérisation

1. a) $f(0 + 0) = f(0)$ donc $f(0)^2 = f(0)$

b) $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$

c) $f(x) = f(x + 0) = f(x) \times f(0) = 0$

2. a) $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{f(a)f(h) - f(a)}{h} = f(a) \times \dfrac{(f(h) - f(0))}{h}$

b) Lorsque h tend vers 0, $\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ tend vers $f'(0) = 1$, d'où $f'(a) = f(a)$.

c) f verifie $f' = f$ et $f(0) = 1$ donc f est la fonction exponentielle.

Vers la Tle

147. A. 1. 3h.

2. À partir de 3h.

B. 1. $g'(x) = 12{,}5e^{-0{,}125x+1} - 1{,}5625xe^{-0{,}125x+1}$

$= (12{,}5 - 1{,}5625x)e^{-0{,}125x+1}$

2.

x	0	8	30
cosh	4 ↗	100	↘ 23,97

3. 8 jours.

148. 1. Le bénéfice maximal est de 9 000 euros, obtenu pour 500 toboggans produits.

2. Elle doit fabriquer entre 373 et 99 toboggans.

149. 1. a) $f(0) = 1$

b) -2.

c) $f'(x) = 1 + ae^{-x^2} - 2ax^2e^{-x^2}$

$= 1 - a(2x^2 - 1)e^{-x^2}$

d) $a = -3$

2. a) $x + 1 > 0$ et $-3xe^{-x^2} > 0$ donc $f(x) > 0$.

b) Si$x \leqslant -1$, $2x^2 - 1 \geqslant 0$donc $f'(x) \geqslant 0$.

Travaux pratiques

p. 192-193

TP 1. Étude de décroissance radioactive

- **Durée estimée :** 50 min
- **Objectif :** Modéliser la désintégration de noyaux radioactifs par une fonction exponentielle.

A. 2. $t_{\frac{1}{2}} \approx 3{,}65$.

3.

```
from math import*
l=float(input("lambda="))
t=0
u=e**(-l*t)
while u>0.5:
    t=t+0.1
    u=e**(-l*t)
print(t)
```

B. 1. $f'(0) = -2 \times 10^8 \times \lambda$

2. $-425\,000$

3. Américium.

4. $t_{\frac{1}{2}} \approx 300$.

5. 900 ans.

TP 2. Étude d'un capital

- **Durée estimée :** 50 min
- **Objectif :** Modéliser l'évolution d'un capital à l'aide de suites et de la fonction exponentielle.

A. 1. $C(1) = 102\,000$.

2. $(C(n))$ est géométrique.

4. b) $u_n \approx C(n)$

c) $e^{0{,}0198} \approx 1{,}02$

5. Non.

B. 1. Il est de 105 000.

2. $\dfrac{105\,000}{100\,000} = e^k$

3. $k \approx 0{,}04879$

4. Ce sera possible à partir de 2035.

5. Il doit chercher un taux de 6 %.

TP 3. Famille de fonctions

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Étudier une famille de fonctions en s'appuyant sur un logiciel de géométrie dynamique.

4. Si $k = 0$, f est constante sur $\mathbb{R}$. Sinon :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	1	↗

En autonomie

p. 194-195

Calculer avec des exponentielle

150. b **151. d**

152. b **153. a** et **d**

154. a) e^3 **b)** e^{6x} **c)** e^{-3}
d) e^{-3x+2} **e)** e^3 **f)** e

155. a) $e^{2x} \times e^{-x+1} = e^{x+1}$ **b)** $e^2 - e(e+1) = -e$

c) $e \times \dfrac{e^4}{e^2} = e^3$ **d)** $e^{-2} \times (e^2)^3 = e^4$

156. a) $e^3(e^{-3} + e^2) = 1 + e^5$

b) $\frac{1}{e}(e^2 + 4e) = e + 4$

c) $(e - e^{-1})^2 = e^2 - 2 + e^{-2}$

d) $e^{x+2}(e^{-3} - e) = e^{x-1} - e^{x+3}$

e) $(e^x - e^2)(e^x + e^2) = e^{2x} - e^4$

f) $(e^x - 2e^{-3})^2 = e^{2x} - 4e^{x-3} + 4e^{-6}$

157. a) $3e^x - 1 + e^{3x}$ **b)** $e^8 - 4e^4 + 4$

c) $e^{2x} - 9$

158. a) $x(5 - x)e^x$ **b)** $(x + 7)e^{6-x}$

c) $(e^x - 1)(e^x + 1)$ **d)** $e^2(e^x - 7)$

159. a) $(e^{2x} - 3)^2$ **b)** $e^x(e^x - 3)$

c) $(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})$ **d)** $e^{2x}(2e^x - 1)(2e^x + 1)$

Résoudre des équations et inéquations

160. b **161. a** **162. b**

163. a) $-e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$

b) $e^{-2x+3} = e \Leftrightarrow e^{-2x+3} = e^1 \Leftrightarrow -2x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

c) $4 - 4e^{5x+2} = 0 \Leftrightarrow 1 = e^{5x+2} \Leftrightarrow 0 = 5x + 2$

$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$

164. a) $e^x - e < 0 \Leftrightarrow e^x < e^1 \Leftrightarrow x < 1$

Les solutions sont les nombres de $]-\infty\ ;\ 1[$.

b) $2 - 2e^{3-x} > 0 \Leftrightarrow e^0 > e^{3-x} \Leftrightarrow 0 > 3 - x \Leftrightarrow x > 3$

Les solutions sont les nombres de $]3\ ;\ +\infty[$.

c) $\frac{1}{e} - e^{4x+1} > 0 \Leftrightarrow e^{-1} > e^{4x+1} \Leftrightarrow -1 > 4x + 1$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} > x$

Les solutions sont les nombres de $\left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right[$.

165. a) $xe^x - 3x^2e^x = 0 \Leftrightarrow x(1 - 3x)e^x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $1 - 3x = 0$ ou $e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1}{3}$

b) $2(x + 1)e^x - 2(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2(x + 1)(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $e^x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$

c) $e^{2x} = 2e^x - 1 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (e^x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Étudier des fonctions

166. b et **c**

167. b

168. b et **d**

169. a et **c**

170. d

171. a

172. d

173. a et **d**

174. a) $f'(x) = e^x + xe^x$ **b)** $g'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$

c) $h'(x) = (3 - x)e^{x+2}$

d) $i'(x) = \frac{(1-2x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{1-2x}{e^x}$

175. a) Pour tout réel x, $e^{-x+4} > 0$.

b)

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$e^{x+5} - 1$		$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - e$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(e^x - e)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d)

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		1		$+\infty$
$4x + 5$		$-$	0	$+$		$+$	
$2 - 2e^{x-1}$		$+$		$+$	0	$-$	
$(4x + 5)(2 - 2e^{x-1})$		$-$	0	$+$	0	$-$	

176. a) $f'(x) = 3e^{3x+1} > 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) $g'(x) = -3e^{-3x+4} < 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) $h'(x) = -6e^{3x+1} < 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

d) $i'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$. On en déduit le tableau de signe et le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
i		↘	‖	↘	e	↗	

177. a) $f'(x) = -3e^{-3x+4} - 3 < 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) $g'(x) = \dfrac{(2x-1)e^{2x+3}}{x^2}$. On en déduit le tableau de signe et le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
e^{2x+3}		$+$		$+$		$+$	
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{(2x-1)e^{2x+3}}{x^2}$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
g		↘	‖	↘	$2e^4$	↗	

c) $h'(x) = (-x^2 + 2x)e^x$. On en déduit le tableau de signe et le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$-x^2+2x$		$-$	0	$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
h		↘	0	↗	$4e^2$	↘	

d) $i'(x) = (-2x^2 - 6x + 6)e^{-2x+1}$

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{21}}{2}$		$\frac{-3+\sqrt{21}}{2}$		$+\infty$
$-x^2+6x-6$		$-$	0	$+$	0	$-$	
e^{-2x+1}		$+$		$+$		$+$	
$i'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
i		↘		↗		↘	

178. $f(2) = 2^2e^{2-2} = 4$.

$f'(x) = 2xe^{x-2} + x^2e^{x-2}$ donc $f'(2) = 8$

Une équation de la tangente au point d'abscisse 2 est donc $y = 8(x-2) + 4$ soit $y = 8x - 12$.

179. Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc $5e^x + 2 > 0$ et $e^x + 3 > 0$ donc $f(x) > 0$.

$f(x) - 5 = \dfrac{5e^x + 2}{e^x + 3} - 5 = \dfrac{-13}{e^x + 3} < 0$

donc $f(x) < 5$.

180. $f'(x) = (x^2 + x)e^x$: on en déduit les tableaux de signe et de variations suivants.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x^2+x		$+$	0	$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	$3e^{-1}$	↘	1	↗	

181. On pose $X = e^x$. L'équation revient à $X^2 + 6X - 7 = 0$ qui a pour solution $X = 1$ ou $X = -7$. $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ et $e^x = -7$ n'a pas de solution ; finalement, la seule solution est $x = 1$.

CHAPITRE 7 Fonctions trigonométriques

Manuel p. 196-219

I. Introduction

Objectifs du chapitre

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les notions de cercle trigonométrique, de radian et de découvrir et d'étudier de nouvelles fonctions dites trigonométriques, à savoir cosinus et sinus.

Ainsi, nous avons fait le choix d'activités d'introduction de diverses natures, progressives et qui suivent la trame du cours.

Ceci est accompagné d'exercices au niveau croissant de difficulté et de TP de recherche et d'algorithmique permettant une appropriation progressive des différents contenus par l'élève.

Capacités

- → **Se repérer sur le cercle trigonométrique.**
- → **Déterminer le sinus et le cosinus d'un réel à l'aide du cercle trigonométrique.**
- → **Résoudre à l'aide du cercle trigonométrique des équations ou inéquations trigonométriques.**
- → **Connaître et exploiter les propriétés des fonctions sinus et cosinus, notamment parité et périodicité.**

II. Corrigés des activités et exercices

Pour prendre un bon départ p. 197

1. Définir le terme *trigonométrie*

La trigonométrie est une branche des mathématiques qui traite des relations entre distances et angles dans les triangles et des fonctions telles que sinus, cosinus et tangente.

2. Simplifier des fractions

a) $360 \times \frac{1}{4} = \frac{360}{4} = 90$

b) $360 \times \frac{7}{6} = \frac{360 \times 7}{6} = 420$

c) $2\pi \times \frac{1}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

d) $2\pi \times \frac{5}{12} = \frac{2 \times 5 \times \pi}{12} = \frac{2 \times 5 \times \pi}{2 \times 6} = \frac{5\pi}{6}$

3. Effectuer des calculs

a) $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

b) $\frac{7\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \frac{10\pi}{5} = 2\pi$

c) $\frac{7\pi}{5} - \frac{\pi}{6} = \frac{42\pi - 5\pi}{30} = \frac{37\pi}{30}$

d) $\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{24} = \frac{10\pi + \pi}{24} = \frac{11\pi}{24}$

4. Déterminer une formule de trigonométrie

1. Dans le triangle ABH, le côté adjacent à l'angle $\widehat{BAH}$ est AH.

2. Dans le triangle ACH, le côté opposé à l'angle $\widehat{ACH}$ est AH.

3. $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC}$ et $\sin(\widehat{ACB}) = \frac{AB}{BC}$.

5. Identifier les courbes des fonctions de référence

1. $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction carré, $\mathscr{C}_g$ est celle de la fonction inverse, $\mathscr{C}_h$ est celle de la fonction racine carrée et $\mathscr{C}_i$ est celle de la fonction cube.

2. La courbe $\mathscr{C}_f$ est la seule courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. De plus, pour tout réel x, $f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2(x^2) = 1x^2 = x^2 = f(x)$.

Donc la fonction carré est paire.

3. Les courbes $\mathscr{C}_i$ et $\mathscr{C}_g$ sont les seules courbes symétriques par rapport à l'origine du repère.

De plus, pour tout réel x,

$i(-x) = (-x)^3 = (-1)^3(x)^3 = -x^3 = -i(x)$.

Donc la fonction cube est impaire.

Enfin pour tout réel x non nul,

$g(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -g(x)$.

Donc la fonction inverse est impaire.

6. Identifier des fonctions paires ou impaires

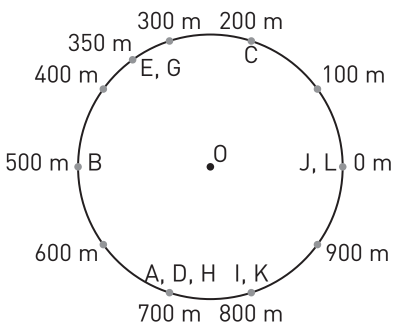
$\mathscr{C}_1$ semble symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc représentative d'une fonction paire. $\mathscr{C}_3$ semble symétrique par rapport à l'origine du repère, donc représentative d'une fonction impaire.

Activités p. 198-199

Activité 1. Découvrir le cercle trigonométrique

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir le cercle trigonométrique, y placer des points en tenant compte des congruences associées.

1. a)



b) Éléonore et Grégoire se retrouvent au même endroit car Eléonore a fait exactement 1 tour de plus que Grégoire.

Aurélie, Dorian et Hamid se retrouvent au même endroit car Dorian et Hamid ont fait exactement 1 tour de plus qu'Aurélie.

Iris et Katell se retrouvent au même endroit car Katell a fait exactement 1 tour de plus qu'Iris.

Julie et Lili se retrouvent au même endroit car Lili a fait exactement 1 tour de plus que Julie.

c) Capucine, Fatima, Iris, Julie, Katell et Lili sont au même endroit.

Grégoire et Éléonore sont au même endroit.

Aurélie, Benjamin, Dorian et Hamid sont au même endroit.

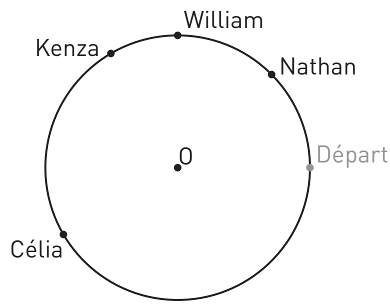
d) Pour un périmètre de 50 m, tous les élèves se retrouveraient au même endroit.

2. a) $P = 2\pi R = 2\pi$ km

b) $d_{\text{Cassandre}} = 2\pi \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} \approx 1{,}6$ km

$d_{\text{Terry}} = 2\pi \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4\pi}{3} \approx 4{,}2$ km

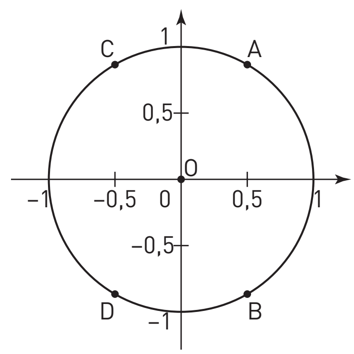
c)



Activité 2. Se repérer sur le cercle trigonométrique

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Placer les points sur le cercle trigonométrique et repérer les symétries associées.

1. a)



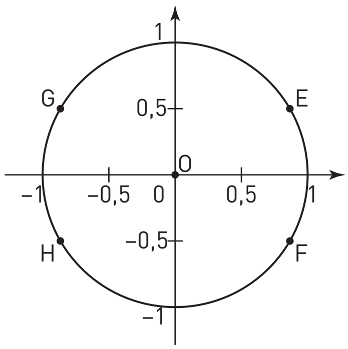
b) Voir la figure. Le réel associé au point B dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ est $-\dfrac{\pi}{3}$.

c) Voir la figure. Le réel associé au point C dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ est $\frac{2\pi}{3}$.

d) Voir la figure. Le réel associé au point D dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ est $-\frac{2\pi}{3}$.

2. • Pour $\frac{\pi}{6}$:

a)



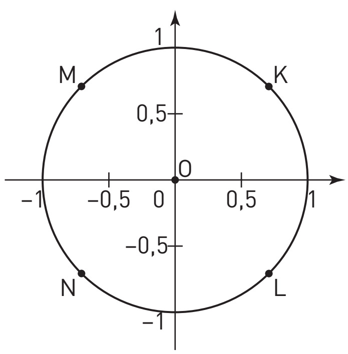
b) Voir la figure. Le réel associé au point F dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ est $-\frac{\pi}{6}$.

c) Voir la figure. Le réel associé au point G dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ est $\frac{5\pi}{6}$.

d) Voir la figure. Le réel associé au point H dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ est $-\frac{5\pi}{6}$.

• Pour $\frac{\pi}{4}$:

a)



b) Voir la figure. Le réel associé au point L dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi[$ est $\frac{7\pi}{4}$, dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ est $-\frac{\pi}{4}$.

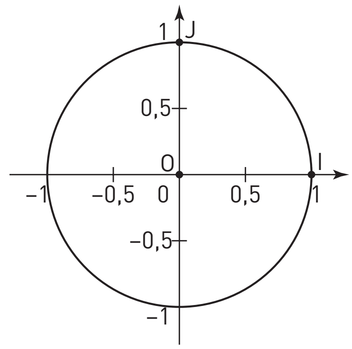
c) Voir la figure. Le réel associé au point M dans les intervalles $[0\ ;\ 2\pi[$ et $]-\pi\ ;\ \pi]$ est $\frac{3\pi}{4}$.

d) Voir la figure. Le réel associé au point N dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi[$ est $\frac{5\pi}{4}$, dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ est $-\frac{3\pi}{4}$.

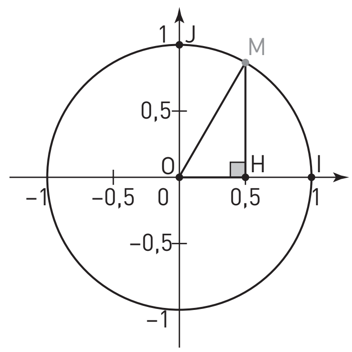
Activité 3. Faire le lien entre triangle et cercle trigonométrique

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Faire le lien entre arc, point-image, coordonnées, cosinus et sinus.

1.



2. a)



b) La hauteur issue d'un point dans un triangle est la droite qui passe par ce point et qui coupe le côté opposé perpendiculairement. Le triangle OHM est donc rectangle en H.

c) $\cos(\widehat{HOM}) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{OH}{OM} = \frac{OH}{1} = OH$

et $\sin(\widehat{HOM}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{HM}{OM} = \frac{HM}{1} = HM$.

3. a) Si $x_N = \frac{1}{2}$, alors N appartient à la médiatrice du segment [OI] donc ONI est isocèle en N, donc ON = NI.

Or ON = OI (ce sont tous les deux des rayons du cercle trigonométrique), donc ON = NI = OI, donc ONI est équilatéral.

b) P est le symétrique de N par rapport à (OJ), R est le symétrique de I par rapport à (OJ) et O est son propre symétrique par rapport à (OJ). Donc le triangle OPR est symétrique à ONI par rapport à (OJ), donc OPR est aussi équilatéral.

c) L'abscisse de N est $\frac{1}{2}$, celle de P est $-\frac{1}{2}$,

ces deux points ont même ordonnée

d'où NP $= \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.

Donc ON = OP = NP = 1.

Le triangle ONP est équilatéral.

4. Le périmètre du cercle est égal à 2π. Donc l'arc $\overset{\frown}{IR}$ a pour longueur π, l'arc $\overset{\frown}{IN}$ a pour longueur $\frac{\pi}{3}$ et l'arc $\overset{\frown}{IP}$ a pour longueur $\frac{2\pi}{3}$.

5. De ce qui précède, on obtient :

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

En utilisant le théorème de Pythagore et la formule résultante $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on obtient $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Activité 4. Découvrir de nouvelles fonctions

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Utiliser un logiciel de géométrie dynamique en vue de découvrir de nouvelles fonctions et de conjecturer les propriétés de ces dernières.

1. et **2.** Voir le graphique 1 p. 199 du manuel.

3. Pour $\alpha = -\pi$, le point A se trouve en K. Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, le point A se trouve en J.

De manière générale, il se trouve sur le cercle trigonométrique, sa position dépendant de l'angle α.

4. et **5.** Voir le graphique 2 p. 199 du manuel.

6. Les deux courbes semblent présenter une répétition du même motif de longueur 2π. Par translation de longueur 2π, les courbes sont globalement invariantes.

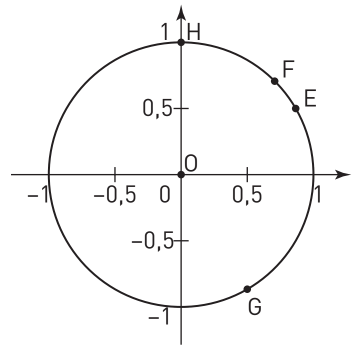
La courbe du cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, celle du sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.

7. Par enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique, les points $A(\cos(x) ; \sin(x))$ et $M(\cos(x + 2\pi) ; \sin(x) + 2\pi)$ sont confondus, d'où la périodicité des fonctions cosinus et sinus. Les parité et imparité des fonctions cosinus et sinus découlent des propriétés de symétrie du cercle trigonométrique.

8. Électricité, son, ondes, etc.

À vous de jouer ! p. 205-207

1.



2. $B_{\frac{\pi}{3}}$ et $C_{\frac{5\pi}{6}}$.

3. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

5. $\mathcal{S}_{]-\pi;\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right\}$

6. $\mathcal{S}_{[0;2\pi[} = \left[\frac{\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4}\right]$

7. $\mathcal{S}_{]0;2\pi]} = \left\{\frac{4\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3}\right\}$

8. $\mathcal{S}_{]-\pi;\pi]} = \left]-\pi ; \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6} ; \pi\right]$

9. $\mathcal{S}_{]-\pi;\pi]}\quad \left]-\pi\ ;-\dfrac{\pi}{6}\right[\cup\left]\dfrac{5\pi}{6}\ ;\pi\right]$

10. $\mathcal{S}_{]-\pi;\pi]}=\left]-\pi\ ;-\dfrac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{4}\ ;\pi\right]$

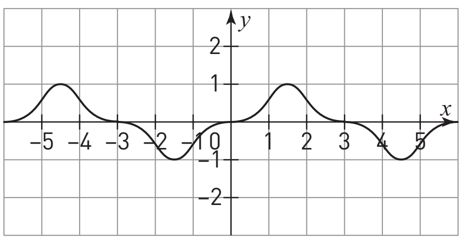
11. $\mathcal{S}_{[0;2\pi[}=\left[\dfrac{5\pi}{6}\ ;\pi\right]$

12. $\mathcal{S}_{[0;2\pi[}=\left[-\dfrac{\pi}{3}\ ;\dfrac{\pi}{2}\right]$

13. 1. $g(-x)=\cos(-4x)\sin^2(-4x)=\cos(-4x)(-\sin(4x))^2$ $=\cos(4x)\sin^2(4x)=g(x)$ donc g est paire. Graphiquement, sa courbe représentative $\mathcal{C}_g$ est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. $g(x+2\pi)=\cos(4(x+2\pi))\sin^2(4(x+2\pi))$ $=\cos(4x+8\pi)\sin^2(4x+8\pi)=\cos(4x)\sin^2(4x)=g(x)$ donc g est 2π-périodique.

14. 1.



2. D'après le graphique, g semble impaire et 2π-périodique.

3.
$$g(x)+g(-x)=\frac{1}{4}(3\sin(x)-\sin(3x))+\frac{1}{4}(3\sin(-x)-\sin(-3x))$$
$$=\frac{1}{4}(3\sin(x)-\sin(3x)-3\sin(x)+\sin(3x))=0$$

Donc g est impaire.

4.
$$g(x+2\pi)=\frac{1}{4}(3\sin(x+2\pi)-\sin(3(x+2\pi)))$$
$$=\frac{1}{4}(3\sin(x)-\sin(3x+6\pi))$$
$$=\frac{1}{4}(3\sin(x)-\sin(3x))=g(x)$$

Donc g est 2π-périodique.

15. 1. $g(x)+g(-x)=\cos(x)+\sin(x)+\cos(-x)$ $+\sin(-x)=2\cos(x)\neq 0$ dès que $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
Donc g n'est pas impaire.

$g(x)-g(-x)=\cos(x)+\sin(x)-\cos(-x)-\sin(-x)$ $=2\sin(x)\neq 0$ dès que $x\neq 0+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

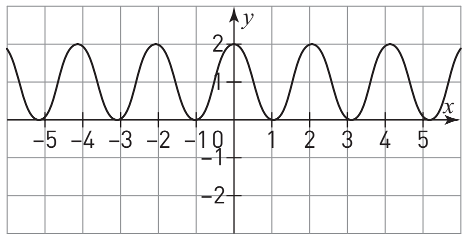
Donc g n'est pas paire.

2. $g(x+2\pi)=\cos(x+2\pi)+\sin(x+2\pi)=\cos(x)+\sin(x)$ $=g(x)$, donc g est 2π-périodique.

Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de g présente une répétition du « même motif de courbe de longueur 2π ».

3. Pour tout réel x, $-1\leqslant\cos(x)\leqslant 1$ et $-1\leqslant\sin(x)\leqslant 1$ d'où $-2=\min\limits_{\mathbb{R}}(\cos(x))+\min\limits_{\mathbb{R}}(\sin(x))\leqslant\cos(x)+\sin(x)$ $\leqslant\max\limits_{\mathbb{R}}(\cos(x))+\max\limits_{\mathbb{R}}(\sin(x))=2$.

16. 1.



2.
$$g\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\right)+1$$
$$=\cos(3x+2\pi)+1=\cos(3x)+1=g(x)$$

Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de g présente une répétition du « même motif de courbe de longueur $\dfrac{2\pi}{3}$ ».

3. Pour tout réel x, $-1\leqslant\cos(3x)\leqslant 1$
d'où $0\leqslant\cos(3x)+1\leqslant 2$.
Donc $0\leqslant g(x)\leqslant 2$.

Exercices d'application p. 208-209

Apprendre à apprendre

17. Voir le cours p. 202-203 du manuel.

18. Voir le cours p. 200 du manuel.

19. Voir le cours p. 203-204 du manuel.

20. Voir le cours p. 200-204 du manuel.

Questions – Flash

21. $B_{\frac{\pi}{6}}$; $E_{\frac{2\pi}{3}}$; $P_{-\frac{\pi}{6}}$; $F_{\frac{5\pi}{6}}$; $L_{-\frac{2\pi}{3}}$

22. Dans $[0 ; 2\pi[$: $C_{\frac{\pi}{3}}$; $F_{\frac{5\pi}{6}}$; $K_{-\frac{5\pi}{6}}$.

23. $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

24. La courbe $\mathscr{C}_1$ est celle de la fonction cosinus, $\mathscr{C}_2$ est celle de la fonction sinus.

Se repérer sur le cercle trigonométrique

25. $D_{\frac{7\pi}{4}}$; $E_{\frac{\pi}{2}}$; F_{π} ; $G_{\frac{3\pi}{2}}$; H_0

26. 1. a) I_0 **b)** A_{π} **c)** $I_{4\pi}$ **d)** $I_{56\pi}$
2. a) $A_{155\pi}$ **b)** $I_{70\pi}$ **c)** $A_{-1\,043\pi}$ **d)** $I_{-588\pi}$

27. 1. a) $J_{\frac{\pi}{2}}$ **b)** $J_{\frac{5\pi}{2}}$ **c)** $B_{\frac{11\pi}{2}}$ **d)** $B_{-\frac{13\pi}{2}}$
2. a) $B_{\frac{67\pi}{2}}$ **b)** $B_{-\frac{37\pi}{2}}$ **c)** $A_{\frac{498\pi}{2}}$ **d)** $B_{-\frac{117\pi}{2}}$

Déterminer le sinus et le cosinus d'un réel

Les résultats des exercices 28 à 30 se retrouvent à l'aide du cercle trigonométrique et des symétries axiale et centrale constatées.

28. 1. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

2. $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

29. 1. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

30. 1. $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

31. a) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

b) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

d) $\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi$ donc

$\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

et $\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

e) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

f) $-\frac{11\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - 4\pi$ donc $\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

et $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

32. a) $0 < \pi < 6\pi$, donc $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$,

donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$.

b) $0 < 71\pi < 100\pi$, donc $0 < \frac{71\pi}{100} < \pi$,

donc $\sin\left(\frac{71\pi}{100}\right) > 0$.

c) $-11{,}5\pi < -5\pi < 0$, donc $-\frac{\pi}{2} < -\frac{5\pi}{23} < 0$,

donc $\cos\left(-\frac{5\pi}{23}\right) > 0$.

d) $66\pi < 81\pi < 88\pi$, donc $\frac{3\pi}{2} < \frac{81\pi}{44} < 2\pi$, donc

$\sin\left(\frac{81\pi}{44}\right) < 0$.

33. a) $7\pi < 10\pi < 10{,}5\pi$, donc $\pi < \frac{10\pi}{7} < \frac{3\pi}{2}$,

donc $\cos\left(\frac{10\pi}{7}\right) < 0$.

b) $0 < \pi < 6\pi$, donc $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$, donc $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$.

c) $13\pi < 17\pi < 26\pi$, donc $\frac{\pi}{2} < \frac{17\pi}{26} < \pi$,

donc $\cos\left(\frac{17\pi}{26}\right) < 0$.

d) $-8\pi < -7\pi < -4\pi$, donc

$-\pi < \frac{-7\pi}{8} < -\frac{\pi}{2}$, donc $\sin\left(\frac{-7\pi}{8}\right) < 0$.

Résoudre une équation ou une inéquation trigonométrique

34. 1. $\mathcal{S}_{[0;2\pi[} = \left\{\frac{\pi}{6} ; \frac{11\pi}{6}\right\}$

2. $\mathcal{S}_{[0;2\pi[} \quad \left\{\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}\right\}$

35. 1. $\mathcal{S}_{]-\pi;\pi]} = \left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right]$

2. $\mathcal{S}_{]-\pi;\pi]} = \left]-\pi ; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} ; \pi\right]$

36. 1. $\mathcal{S}_{\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]} = \left]-\frac{\pi}{2} ; -\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{6} ; \frac{3\pi}{2}\right]$

2. $\mathcal{S}_{]\pi;3\pi]} = \left]\frac{7\pi}{4} ; \frac{13\pi}{4}\right[$

37. 1. L'abscisse de A est $\frac{\pi}{6}$, celle de B est $\frac{11\pi}{6}$.

2. Par lecture graphique, $\mathcal{S}_{[0;\,2\pi[} = \left\{\frac{\pi}{6} ; \frac{11\pi}{6}\right\}$.

3. Nous cherchons les abscisses pour lesquelles la courbe violette est située en dessous de la courbe bleue, d'où

$\mathcal{S}_{[0;2\pi[} = \left[\frac{\pi}{6} ; \frac{11\pi}{6}\right]$.

38. 1. L'abscisse de A est $-\frac{3\pi}{4}$, celle de B est $-\frac{\pi}{4}$.

2. Par lecture graphique, $\mathcal{S}_{]-\pi;\,\pi[} = \left\{\frac{-3\pi}{4} ; -\frac{\pi}{4}\right\}$.

3. Nous cherchons les abscisses pour lesquelles la courbe violette est située au-dessus de la courbe bleue, d'où

$\mathcal{S}_{]-\pi\,;\pi]} = \left]-\pi \; ; -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4} ; \pi\right]$.

4. L'abscisse du point C est égale à $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4}$.

Exploiter les propriétés des fonctions sinus et cosinus

39. 1. f est paire, donc $f(-x) = f(x)$.
Donc $f(x) - f(-x) = 0$.

2. $f(x) - f(-x) = x^2 + \cos(x) - ((-x)^2 + \cos(-x))$
$= x^2 + \cos(x) - (x^2 + \cos(x)) = 0$

Donc f est paire.

40. 1. g est impaire donc $g(-x) = -g(x)$.
Donc $g(x) + g(-x) = 0$.

2. $g(x) + g(-x) = x + \sin(x) + ((-x) + \sin(-x))$
$= x + \sin(x) - x - \sin(x) = 0$

Donc g est impaire.

41. a) $f(x+1) = \cos(2\pi(x+1)) = \cos(2\pi x + 2\pi)$
$= \cos(2\pi x) = f(x)$

b) $f\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(3\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$
$= \sin(3x+2\pi) = \sin(3x) = f(x)$

c) $f\left(x+\dfrac{2\pi}{7}\right) = \dfrac{2}{3}\cos\left(7\left(x+\dfrac{2\pi}{7}\right)+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$= \dfrac{2}{3}\cos\left(7x+2\pi+\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2}{3}\cos\left(7x+\dfrac{\pi}{4}\right) = f(x)$

d) $f\left(x+\dfrac{6\pi}{5}\right) = \dfrac{10}{7}\sin\left(\dfrac{5\left(x+\dfrac{6\pi}{5}\right)-8}{3}\right)$

$= \dfrac{10}{7}\sin\left(\dfrac{5x+6\pi-8}{3}\right) = \dfrac{10}{7}\sin\left(\dfrac{5x-8}{3}+2\pi\right)$

$= \dfrac{10}{7}\sin\left(\dfrac{5x-8}{3}\right) = f(x)$

42. 1. $f(-x) = \sin(2(-x)) = \sin(-2x) = -\sin(2x) = -f(x)$ et $g(-x) = 2\sin(-x) = -2\sin(x) = -g(x)$.

Donc f et g sont impaires.

Graphiquement, leurs courbes représentatives, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, sont donc symétriques par rapport à l'origine du repère.

2. $h(-x) = \sin^2(-x) = (-\sin(x))^2 = \sin^2(x) = h(x)$

Donc h est paire.

Graphiquement, sa courbe représentative $\mathscr{C}_h$ est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3. $\mathscr{C}_1$ est la seule courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc $\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_h$.

De plus, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{2}\right) = \sin(\pi) = 0$,

et $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\times 1 = 2$.

Donc $\mathscr{C}_2 = \mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_3 = \mathscr{C}_f$.

Calculs et automatismes

43. $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$; $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

et $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

44. $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$; $\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

45. • $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

• $1-\sin^2\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = 1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1-\dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

• $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$

Exercices d'entraînement p. 210-212

Se repérer sur le cercle trigonométrique

46. 1. Chaque chanson dure $\dfrac{60}{6} = 10$ min.

À la fin de la 1re chanson, le saphir aura donc parcouru 330 tours et $\dfrac{10}{3}$ de tours, soit 333 tours et $\dfrac{1}{3}$ de tour.

Donc le saphir se retrouvera en C (ou sur le demi-axe [OC)).

2. a) Au bout de 3 minutes, le saphir aura parcouru 48 tours et $\dfrac{6}{3} = 2$ tours, soit 50 tours.

Donc le saphir se retrouvera en P (ou sur le demi-axe [OP)).

b) Au bout de 4 minutes, le saphir aura parcouru 64 tours et $\dfrac{8}{3}$ de tours, soit 66 tours et $\dfrac{2}{3}$ de tour.

Donc le saphir se retrouvera en K (ou sur le demi-axe [OK)).

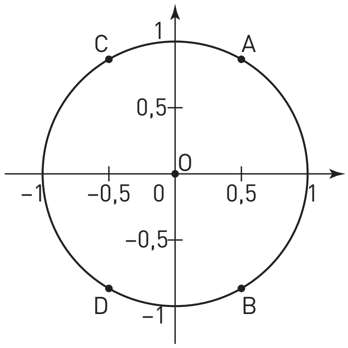
c) À la fin de la 1re chanson, soit au bout de 5 minutes, le saphir aura parcouru 80 tours et $\dfrac{10}{3}$ de tours, soit 83 tours et $\dfrac{1}{3}$ de tour.

Donc le saphir se retrouvera en D (ou sur le demi-axe [OD)).

d) À la fin de la 2e chanson, soit au bout de 10 minutes, le saphir aura parcouru 160 tours et $\dfrac{20}{3}$ de tours, soit 166 tours et $\dfrac{2}{3}$ de tour.

Donc le saphir se retrouvera en K (ou sur le demi-axe [OK)).

47. 1.

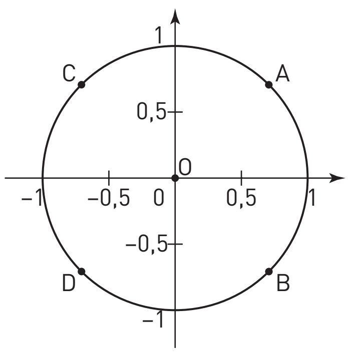


2. Voir la figure. Le réel associé au point B dans l'intervalle [0 ; 2π[est $\frac{5\pi}{3}$; dans l'intervalle]− π ; π], $-\frac{\pi}{3}$.

3. Voir la figure. Le réel associé au point C dans les intervalles [0 ; 2π[et]− π ; π] est $\frac{2\pi}{3}$.

4. Voir la figure. Le réel associé au point D dans l'intervalle [0 ; 2π[est $\frac{4\pi}{3}$; dans l'intervalle]− π ; π], $-\frac{2\pi}{3}$.

48. 1.

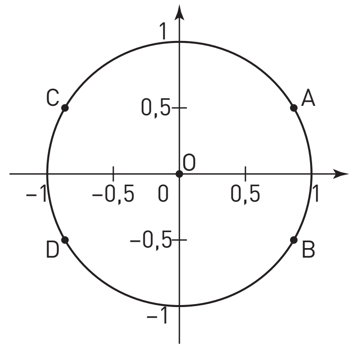


2. Voir la figure. Le réel associé au point B dans l'intervalle [0 ; 2π[est $\frac{7\pi}{4}$; dans l'intervalle]− π ; π], $-\frac{\pi}{4}$.

3. Voir la figure. Le réel associé au point C dans les intervalles [0 ; 2π[et]− π ; π] est $\frac{3\pi}{4}$.

4. Voir la figure. Le réel associé au point D dans l'intervalle [0 ; 2π[est $\frac{5\pi}{4}$; dans l'intervalle]− π ; π], $-\frac{3\pi}{4}$.

49. 1.



2. Voir la figure. Le réel associé au point B dans l'intervalle [0 ; 2π[est $\frac{11\pi}{6}$; dans l'intervalle]− π ; π], $-\frac{\pi}{6}$.

3. Voir la figure. Le réel associé au point C dans les intervalles [0 ; 2π[et]− π ; π] est $\frac{5\pi}{6}$.

4. Voir la figure. Le réel associé au point D dans l'intervalle [0 ; 2π[est $\frac{7\pi}{6}$; dans l'intervalle]− π ; π], $-\frac{5\pi}{6}$.

Pour les exercices 50 et 51, il est conseillé de faire un tableau contenant en 1re ligne les lettres « en clair », puis les lettres permettant les calculs de mesure et en dernière ligne les lettres après codage.

50. 1. En ajoutant $\frac{4\pi}{13}$ à chaque mesure, on trouve le mot QEXLW.

2. En enlevant $\frac{4\pi}{13}$ à chaque mesure, on trouve le mot CERCLE.

51. 1. Pour C : $3 \times \frac{2\pi}{13} + \frac{5\pi}{13} = \frac{6\pi + 5\pi}{13} = \frac{11\pi}{13}$ donc C correspond à la lettre L.

En procédant ainsi pour chaque lettre, on trouve le mot LEZYKRE.

2. Pour E : $\frac{4\pi}{13} - \frac{5\pi}{13} = -\frac{\pi}{13}$ ce qui correspond à $\frac{25\pi}{13}$, mais aussi à $\frac{51\pi}{13}$. Or $\frac{51\pi}{13} \times \frac{1}{3} = \frac{17\pi}{13}$ donc E correspond à la lettre R. En procédant ainsi pour chaque lettre, on trouve le mot RETMB.

Déterminer le sinus et le cosinus d'un réel

52. Deux réponses sont possibles :

- $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

53. 1. Cet algorithme calcule le reste de la division euclidienne de *a* par *b*.
2. `diveuclide(125,26)` est égal à 21.
3. `diveuclide(43,6)` est égal à 1. Donc un réel associé à $\frac{43\pi}{3}$ est $\frac{\pi}{3}$.

3. $\cos\left(\frac{43\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

et $\sin\left(\frac{43\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

54. 1. a) $\frac{91\pi}{4} - 11 \times 2\pi = \frac{3\pi}{4}$

b) $\cos\left(\frac{91\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

et $\sin\left(\frac{91\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. a) $-\frac{13\pi}{6} + 2\pi = -\frac{\pi}{6}$,

donc $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $-\frac{81\pi}{2} + 20 \times 2\pi = -\frac{\pi}{2}$,

donc $\sin\left(-\frac{81\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

3. a) $\frac{25\pi}{3} - 4 \times 2\pi = \frac{\pi}{3}$, donc $\cos\left(\frac{25\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

et $\sin\left(\frac{25\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

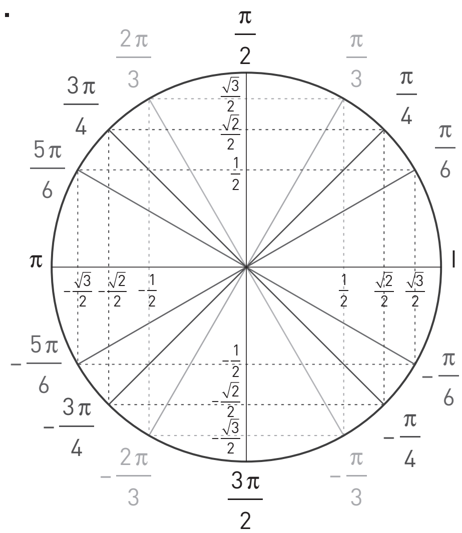
b) $\frac{45\pi}{6} - 4 \times 2\pi = -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$, donc

$\sin\left(\frac{45\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

et $\cos\left(\frac{45\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Pour les questions **3. a)** et **3. b)** il est possible de demander à l'élève d'utiliser la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. De plus, pour la question **3. b)**, il est possible de simplifier en premier lieu la fraction $\frac{45\pi}{6}$, puis d'effectuer les calculs.

55. 1.



x	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{3}$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin(x)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(x)\cos(x)$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
$2x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$\frac{13\pi}{3}$	$\frac{26\pi}{3}$
$\cos(2x)$	0	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\sin(2x)$	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. a) D'après le tableau, on peut conjecturer la formule $\sin(x)\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$.

b)

x	$-\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{13\pi}{6}$	$\dfrac{13\pi}{4}$
$2\cos^2(x)$	1	0	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{1}{2}$

D'après le tableau, on peut conjecturer la formule $2\cos^2(x) - 1 = \cos(2x)$.

56. 1. $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$. Or $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$,

d'où $1-\sin^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$

soit $\sin^2(x) = 1 - \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.

Donc $\sin^2(x) = \dfrac{2-1-\cos(2x)}{2} = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$.

2. $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{2} = \dfrac{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Or $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) > 0 \left(\text{car } 0 < \dfrac{\pi}{8} < \dfrac{\pi}{2}\right)$

donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

$\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{2} = \dfrac{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

Or $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) > 0 \left(\text{car } 0 < \dfrac{\pi}{8} < \dfrac{\pi}{2}\right)$

donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Résoudre une équation ou une inéquation trigonométrique

57. 1. $-\pi < -\dfrac{53\pi}{4} + 2k\pi \leqslant \pi$

$-\pi + \dfrac{53\pi}{4} < 2k\pi \leqslant \pi + \dfrac{53\pi}{4}$

$\dfrac{49\pi}{4} < 2k\pi \leqslant \dfrac{57\pi}{4}$

$\dfrac{49}{4} < 2k \leqslant \dfrac{57}{4}$

2. $\dfrac{49}{8} < k \leqslant \dfrac{57}{8}$ c'est-à-dire $6{,}125 < k \leqslant 7{,}125$

donc $k = 7$.

3. $-\dfrac{53\pi}{4} + 2\pi \times 7 = -\dfrac{53\pi}{4} + 14\pi = \dfrac{-53\pi + 56\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$

58. 1. $-\pi < \dfrac{29\pi}{6} + 2k\pi \leqslant \pi$

$-\pi - \dfrac{29\pi}{6} < 2k\pi \leqslant \pi - \dfrac{29\pi}{6}$

$-\dfrac{35\pi}{6} < 2k\pi \leqslant -\dfrac{23\pi}{6}$

$-\dfrac{35}{6} < 2k \leqslant -\dfrac{23}{6}$

2. $-\dfrac{35}{12} < k \leqslant -\dfrac{23}{12}$, donc $k = -2$.

3. $\dfrac{29\pi}{6} - 2 \times 2\pi = \dfrac{29\pi}{6} - 4\pi = \dfrac{29\pi - 24\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$

59. 1. $2\cos(x) = 1$, soit $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$,

d'où $\mathcal{S}_{[0\,;\,2\pi[} = \left\{\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

2. $2\sin(x) = -1$ soit $\sin(x) = -\dfrac{1}{2}$,

d'où $\mathcal{S}_{[0\,;\,2\pi[} = \left\{\dfrac{7\pi}{6}\,;\,\dfrac{11\pi}{6}\right\}$.

60. 1. $\cos(3x) = \dfrac{1}{2}$, pour k entier relatif, $3x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

ou $3x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$,

soit $x = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}$.

2. $-\dfrac{\pi}{9}$ *et* $\dfrac{\pi}{9}$ ne sont pas les seules solutions. La fonction $x \mapsto \cos(3x)$ étant $\dfrac{2\pi}{3}$-périodique, il suffit donc de calculer x pour $k = 1$, $k = 2$... pour obtenir d'autres solutions.

61. 1. $\sqrt{2}\cos(x) < 1$

$\cos(x) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D'où $\mathcal{S}_{]-\pi\,;\,\pi]} = \left]-\pi\,;-\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}\,;\pi\right]$.

2. $\sqrt{2}\sin(x) \geqslant \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\sin(x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où $\mathcal{S}_{]-\pi\,;\,\pi]} = \left[\frac{\pi}{3}\,;\frac{2\pi}{3}\right]$.

62. 1. Cet affichage répond au problème suivant : « Résoudre l'inéquation $\sin(x) > \frac{1}{2}$ sur $[0\,;2\pi]$.»

2. $\sin(x) \geqslant \frac{1}{2}$ d'où, par lecture du cercle,

$\mathcal{S}_{]-\pi\,;\,\pi]} = \left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right]$.

63. 1. (F) : $-\cos^2(x) - 2\sin(x) + 2$

$= 0 -(1 - \sin^2(x)) - 2\sin(x) + 2 = 0$

$\sin^2(x) - 1 - 2\sin(x) + 2 = 0$

$\sin^2(x) - 2\sin(x) + 1 = 0$

2. On pose $X = \sin(x)$.

$X^2 - 2X + 1 = 0$

$(X-1)^2 = 0$

$X = 1$

3. $X = 1$ revient à $\sin(x) = 1$

d'où $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

64. 1. $X^2 - \frac{\sqrt{3}-1}{2}X - \frac{\sqrt{3}}{4} \geqslant 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 - 4\times 1\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{4} + \sqrt{3}$$

$$= \frac{3-2\sqrt{3}+1+4\sqrt{3}}{4} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2$$

$$X_1 = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}}{2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{et } X_2 = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\mathcal{S}_X = \left]-1\,;-\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\,;1\right[$

2. $\sin(x) \leqslant -\frac{1}{2}$ ou $\sin(x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc

$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left[-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\,;-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,;\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$,

$k \in \mathbb{Z}$.

Exploiter les propriétés des fonctions sinus et cosinus

65. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ d'où :

$-x - 1 \leqslant -x + \cos(x) \leqslant -x + 1$

Donc la courbe représentative de f est située entre les droites d'équations $y = -x - 1$ et $y = -x + 1$.

66. 1. $f(-x) = (-x)^2\cos(-x) = x^2\cos(x) = f(x)$ donc f est paire.

2. Ce programme affiche les coordonnées des points de la courbe d'abscisses entières entre -5 et 11.

67. 1. $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{2+\cos(x)} = -f(x)$,

donc f est impaire.

$f(x+2\pi) = \frac{\sin(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)} = \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)} = f(x)$,

donc f est 2π-périodique.

Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine du repère et qu'elle présente une répétition du « même motif de courbe de longueur 2π ».

2. D'après ce qui précède, nous pouvons étudier la fonction sur un intervalle de longueur 2π du fait de la périodicité, du fait de la symétrie de la courbe nous pouvons même restreindre l'étude à un intervalle de longueur π, par exemple $[0\,;\pi]$.

3. a) D'après la fenêtre de calcul formel,

$f'5(x) = \frac{2\cos(x)+1}{(2+\cos(x))^2}$.

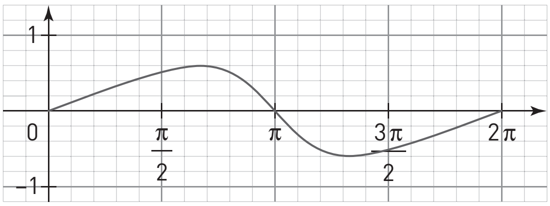
Or $2\cos(x) + 1 \geqslant 0$ si $\cos(x) \geqslant -\frac{1}{2}$.

Donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $\left[0\,;\frac{2\pi}{3}\right]$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $\left[\frac{2\pi}{3}\,;\pi\right]$.

Donc f est croissante sur $\left[0\ ;\dfrac{2\pi}{3}\right]$ et f est décroissante sur $\left[\dfrac{2\pi}{3}\ ;\pi\right]$.

b) D'après ce qui précède, f admet un maximum local $M = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ atteint pour $x = \dfrac{2\pi}{3}$. De plus, f admet un minimum local $m = 0$ atteint pour $x = 0$ et pour $x = \pi$.

c)



68. 1. $\cos(x) = 0$ si $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ donc

$D_{\tan} = \mathbb{R} - \left\{x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$, donc tan est impaire.

Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'origine du repère.

3. $\tan(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$,

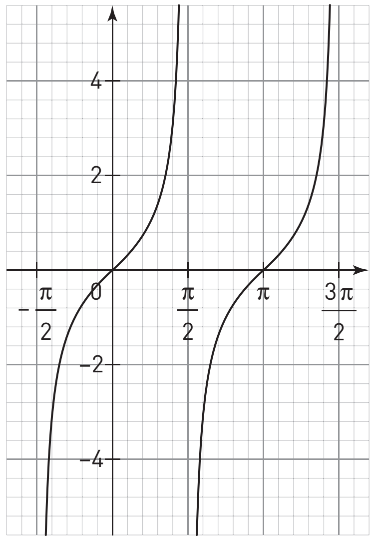
donc tan est π-périodique.

Graphiquement cela signifie que la courbe représentative de la fonction tangente présente une répétition du « même motif de courbe de longueur π ».

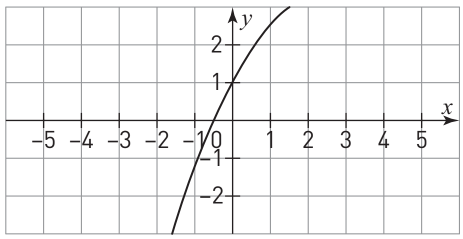
4.

x	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$
$\cos(x)$	1	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
$\sin(x)$	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan(x)$	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

5.



69. 1.



2. $f(x) - f(-x) = 2x + \cos(x) - (-2x + \cos(-x)) = 4x \neq 0$ pour $x \neq 0$ donc f n'est pas paire.

De même, $f(x) + f(-x) = 2\cos(x) \neq 0$ pour $x \notin \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$, donc f n'est pas impaire.

Donc f n'est ni paire ni impaire.

3. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, donc $2x - 1 \leqslant 2x + \cos(x) \leqslant 2x + 1$.

Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de f est située entre les droites d'équations $y = 2x - 1$ et $y = 2x + 1$.

4.

```
import math
l = []
for k in range(-2,4):
    l.append(2*k+math.cos(k))
print(l)
```

70. 1. $f(-x) = e^{\cos(-x)} = e^{\cos(x)} = f(x)$, donc f est paire.

$f(x + 2\pi) = e^{\cos(x+2\pi)} = e^{\cos(x)} = f(x)$, donc f est 2π-périodique. Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et présente une répétition du « même motif de courbe de longueur 2π ».

2. Du fait de la périodicité de f, on peut l'étudier sur $[0\ ;\ 2\pi[$ et du fait de sa parité, on peut l'étudier sur $I = [0\ ;\ \pi[$.

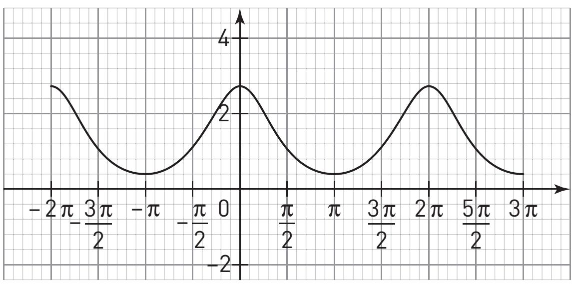
3. a) $-\sin(x) > 0$ si $\sin(x) < 0$ si $x \in\ ]-\pi\ ;\ 0[$.

b) Comme e^x est strictement positif, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $-\sin(x)$. Donc $f'(x) \geqslant 0$ si $x \in [-\pi\ ;\ 0]$ et $f'(x) < 0$ si $x \in [0\ ;\ \pi[$.

Donc f est croissante sur $[-\pi\ ;\ 0]$ et décroissante sur $[0\ ;\ \pi[$.

Donc f admet un maximum local $M = e$ atteint pour $x = 0$. De plus, f admet un minimum local $m = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ atteint pour $x = -\pi$.

4.



Travailler autrement

71. Quelques points importants concernant Hipparque :

- mathématiques en lien avec l'astronomie et la géographie ;
- travaux repris dans *L'Almageste* de Ptolémée ;
- premier mathématicien à avoir utilisé des tables trigonométriques.

72. Quelques points importants concernant les « séries de Fourier » :

- étude des fonctions périodiques ;
- analyse harmonique ;
- théorie du signal ;
- courants électriques ;
- étude du son ;
- traitement d'images.

73. Quelques points importants concernant l'expérience de Lalande et de Lacaille ;

- expérience effectuée au XVIIIe siècle ;
- méthodes de triangulation et de parallaxe ;
- villes (Berlin et Le Cap) quasiment sur le même méridien (longitudes très proches) ;
- données d'une précision très importante.

Exercices bilan p. 213

74. Résolution d'équations et d'inéquations

1. a) Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ d'où $-1 \leqslant X \leqslant 1$.

b) $f(x) = 0$

$4\cos^2(x) = 2(\sqrt{2} - 1)\cos(x) - \sqrt{2} = 0$

En posant $X = \cos(x)$, on obtient

$4X^2 + 2(\sqrt{2} - 1)X - \sqrt{2} = 0$.

c) $4X^2 + 2(\sqrt{2} - 1)X - \sqrt{2} = 0$

$$\begin{aligned}\Delta = b^2 - 4ac &= \left(2\left(\sqrt{2} - 1\right)\right)^2 - 4 \times 4 \times \left(-\sqrt{2}\right)\\ &= 4\left(2 - 2\sqrt{2} + 1\right) + 16\sqrt{2}\\ &= 4\left(2 - 2\sqrt{2} + 1 + 4\sqrt{2}\right)\\ &= 4\left(2 + 2\sqrt{2} + 1\right) = 4\left(\sqrt{2} + 1\right)^2\end{aligned}$$

$$X_1 = \frac{-2\left(\sqrt{2} - 1\right) - 2\left(\sqrt{2} + 1\right)}{2 \times 4} = \frac{-4\sqrt{2}}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$X_2 = \frac{-2\left(\sqrt{2} - 1\right) + 2\left(\sqrt{2} + 1\right)}{2 \times 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{S}_X = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right\}$$

d) $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

d'où $x \in \left\{-\dfrac{3\pi}{4}\ ;\ \dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

$\cos(x) = \dfrac{1}{2}$,

d'où $x \in \left\{-\dfrac{\pi}{3}\ ;\ \dfrac{\pi}{3}\right\}$.

$$\mathcal{S}_{]-\pi\ ;\ \pi]} = \left\{-\frac{3\pi}{4}\ ;\ -\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\right\}$$

2. a) En reprenant les résultats de la question **1. c)** on trouve $\mathcal{S} = \left[-1\ ;\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.

b) $\cos(x) \leqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

donc $x \in \left]-\pi\ ; -\dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4} ; \pi\right]$.

De même, $\cos(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Donc $x \in \left[-\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

D'où $\mathcal{S}_{]-\pi\,;\,\pi]} = \left]-\pi ; -\dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[-\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4} ; \pi\right]$.

75. Inéquations et architecture

1. a) $\mathcal{S}_{[0\,;\,\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

b) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. L'unité graphique étant de 10 m, on obtient $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 10 = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66$ m.

Donc les positions limites des gradins au sol sont d'environ 8,66 m de chaque côté du court.

c) La longueur d'arc associée est égale à

$\left(\dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6}\right) \times 10 = \left(\dfrac{4\pi}{6}\right) \times 10 = \dfrac{20\pi}{3} \approx 20{,}94$ m.

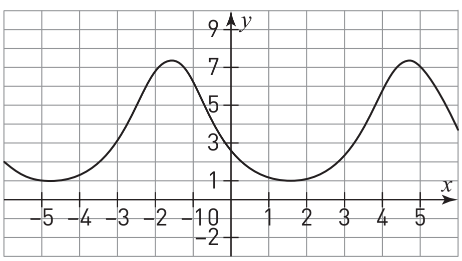
Donc on va utiliser environ 20,94 m de guirlande.

2. a) $\mathcal{S}_{[0\,;\,\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{2\pi}{3}\right\}$

b) La guirlande se trouve à une hauteur de $5\sqrt{3}$ m. Donc la hauteur minimale de l'échafaudage est de $5\sqrt{3} - 1{,}80 \approx 6{,}86$ m.

76. Exponentielle et sinus

1.



2. $f(x) - f(-x) = e^{1-\sin(x)} - e^{1-\sin(x)} = e^{1-\sin(x)} - e^{1+\sin(x)} \neq 0$ pour $x = \dfrac{\pi}{2}$ par exemple, donc f n'est pas paire.

$f(x) + f(-x) = e^{1-\sin(x)} + e^{1-\sin(x)} = e^{1-\sin(x)} + e^{1+\sin(x)} \neq 0$ pour $x = 0$ par exemple, donc f n'est pas impaire.

Donc f n'est ni paire ni impaire.

3. $f(x + 2\pi) = e^{1-\sin(x+2\pi)} = e^{1-\sin(x)} = f(x)$ donc f est 2π-périodique.

4. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$

$-1 \leqslant -\sin(x) \leqslant 1$

$0 \leqslant -\sin(x) \leqslant 2$

$e^0 \leqslant e^{1-\sin(x)} \leqslant e^2$ (car exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$)

$1 \leqslant f(x) \leqslant e^2$

De plus, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e^{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = e^{1-1} = e^0 = 1$

et $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = e^{1-\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = e^{1+1} = e^2$

Donc $M = e^2$ est un maximum local atteint pour $x = \dfrac{3\pi}{2}$ et $m = 1$ est un maximum local atteint pour $x = \dfrac{\pi}{2}$.

77. Étude d'une fonction (1)

1. $f(-x) = \dfrac{\cos(-x)}{3 + \sin^2(-x)} = \dfrac{\cos(x)}{3 + \sin^2(x)} = f(x)$, donc f est paire.

$f(x + 2\pi) = \dfrac{\sin(x + 2\pi)}{2 + \cos(x + 2\pi)} = \dfrac{\sin(x)}{2 + \cos(x)} = f(x)$, donc f est 2π-périodique.

Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et qu'elle présente une répétition du « même motif de courbe de longueur 2π ».

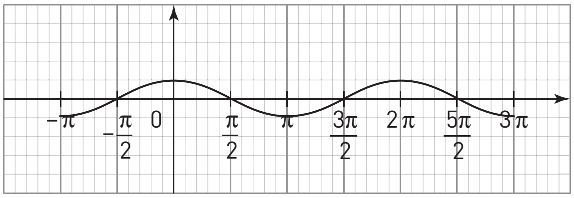
2. D'après ce qui précède, nous pouvons étudier la fonction sur un intervalle de longueur 2π du fait de la périodicité, du fait de la symétrie de la courbe nous pouvons même restreindre l'étude à un intervalle de longueur π, par exemple $[0 ; \pi]$.

3. a) $f'(x) = \dfrac{\sin(x)(\sin^2(x) - 5)}{(3 + \sin^2(x))^2}$

Or, pour tout réel x, $(3 + \sin^2(x))^2 \geqslant 0$ et $\sin^2(x) - 5 < 0$. Donc le signe de $f'(x)$ est le signe contraire de celui de $\sin(x)$, donc $f'(x) \leqslant 0$ sur $[0 ; \pi]$. Donc f est décroissante sur $[0 ; \pi]$.

b) D'après ce qui précède, f admet un maximum local $M = f(0) = \frac{1}{3}$ atteint pour $x = 0$. De plus, f admet un minimum local $m = f(\pi) = -\frac{1}{3}$ atteint pour $x = \pi$.

c)



78. Étude d'une fonction (2)

1. $f(-x) = -\frac{\cos^3(-x)}{3} = -\frac{\cos^3(x)}{3} = f(x)$, donc f est paire.

$f(x + 2\pi) = -\frac{\cos^3(x + 2\pi)}{3} = -\frac{\cos^3(x)}{3} = f(x)$, donc f est 2π -périodique.

Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et qu'elle présente une répétition du « même motif de courbe de longueur 2π ».

2. a) Pour tout réel x, $\cos^2(x) \geqslant 0$

et $\sin(x) \geqslant 0$ si $x \in [0 + 2k\pi ; \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Donc $f'(x) \geqslant 0$ si $x \in [0 + 2k\pi ; \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ et négatif sinon.

b) $f'(x)$ est positive sur $[0 ; \pi]$ et négative sur $[\pi ; 2\pi]$ donc f est croissante sur $[0 ; \pi]$ et décroissante sur $[\pi ; 2\pi]$.

c)

x	$-\pi$	0	π	2π	3π
Variation de f	$\frac{1}{3}$ ↘	$-\frac{1}{3}$ ↗	$\frac{1}{3}$ ↘	$-\frac{1}{3}$ ↗	$\frac{1}{3}$

79. Étude d'une fonction (3)

1. $f(0) = 0\cos(0) - \sin(0) = 0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

2. $f(-x) = (-x)\cos(-x)) - \sin(-x) = -x\cos(x) + \sin(x))$ $= -(x\cos(x) - \sin(x) = -f(x)$, donc f est impaire.

Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

3. $f(x + 2\pi) - f(x) = (x + 2\pi) \cos(x + 2\pi) - \sin(x + 2\pi) - \sin(x\cos(x) - \sin(x)) = (x + 2\pi) \cos(x) - \sin(x) - (x\cos(x) - \sin(x)) = 2\pi \cos(x) \neq 0$ si $x = 0$ par exemple, donc f n'est pas 2π-périodique.

4. a) $\sin(x) \geqslant 0$ si $x \in [0 ; \pi]$.

b) Étude du signe de $f'(x)$:

- sur $[0 ; \pi]$, $-x$ est négatif et $\sin(x)$ est positif, donc $f'(x)$ est négatif ;
- sur $[-\pi ; 0]$, $-x$ est positif et $\sin(x)$ est négatif, donc $f'(x)$ est négatif.

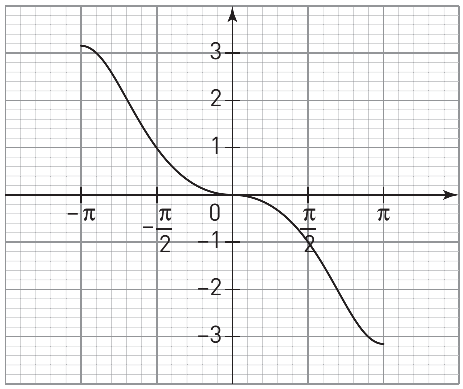
En conclusion, $f'(x)$est négatif sur $[-\pi ; \pi]$, donc f est décroissante sur $[-\pi ; \pi]$.

c) $f(-\pi) = -\pi\cos(-\pi) - \sin(-\pi) = -\pi(-1) - 0 = \pi$

$M = \pi$ est un maximum local pour f sur $[-\pi ; \pi]$ atteint pour $x = -\pi$.

$f(\pi) = \pi\cos(\pi) - \sin(\pi) = \pi(-1) - 0 = -\pi$

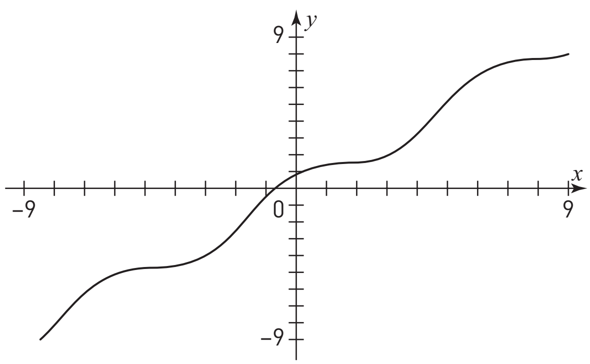
$m = -\pi$ est un minimum local pour f sur $[-\pi ; \pi]$ atteint pour $x = \pi$.



80. Solution(s) de l'équation $\cos(x) = -x$

1. Si $\cos(x) = -x$ alors $x = -\cos(x) \in [-1 ; 1]$.

2. a)



On conjecture une solution à l'équation (E). Il s'agit de l'abscisse pour laquelle $f(x) = 0$, c'est-à-dire l'abscisse pour laquelle la courbe représentative de f passe par l'axe des abscisses.

b) f est dérivable comme somme de fonctions dérivables : $(u + v)' = u + v'$ avec $u(x) = \cos(x)$, $u'(x) = -\sin(x)$, $v(x) = x$ et $v'(x) = 1(x)$.

D'où $f'(x) = -\sin(x) + 1$.

c) Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, d'où $0 \leqslant -\sin(x)$. Donc $f'(x) \geqslant 0$ et f est croissante sur $[-1\ ;\ 1]$.

d) À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx -0{,}74$.

Exercices d'approfondissement p. 214-215

81. Le phare d'Eckmühl

1. En 1 seconde, l'angle parcouru par une lentille est de $\dfrac{360°}{5} = 72°$.

2. L'aire totale parcourue en 1 rotation de 360° est égale à $\pi R^2 = \pi \times 45^2 = 2\,025\,\pi$ km².

Donc, en 1 seconde, l'aire parcourue est de $\dfrac{2\,025\pi}{5} = 405\pi$ km².

82. Réussir à marquer

1. $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{EK}}{\text{KJ}} = \dfrac{25}{x}$ et $\tan(\beta) = \dfrac{\text{KF}}{\text{KJ}} = \dfrac{25 + 5{,}6}{x} = \dfrac{30{,}6}{x}$.

2. a) La fonction tan est dérivable sur $\left]0\ ;\dfrac{\pi}{2}\right[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\left]0\ ;\dfrac{\pi}{2}\right[$ dont le dénominateur ne s'annule pas : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = \sin(x)$; $u'(x) = \cos(x)$; $v(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = -\sin(x)$.

D'où $\tan'(x) = \dfrac{\cos(x) \times \cos(x) - (\sin(x) \times -\sin(x))}{(\cos(x))^2}$

$= \dfrac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{(\cos(x))^2} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

b) $\tan'(x) > 0$, donc tan est strictement croissante sur $\left]0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

3. a) $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

b) $\tan(a - b) = \dfrac{\sin(a - b)}{\cos(a - b)}$

$= \dfrac{\sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)}$

$= \dfrac{\dfrac{\sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} - \dfrac{\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}{\dfrac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} + \dfrac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}$

$= \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$

c) $\tan(\gamma) = \tan(\beta - \alpha) = \dfrac{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$

$= \dfrac{\dfrac{30{,}6}{x} - \dfrac{25}{x}}{1 + \dfrac{30{,}6}{x} \times \dfrac{25}{x}} = \dfrac{\dfrac{5{,}6}{x}}{1 + \dfrac{765}{x^2}} = \dfrac{5{,}6}{x} \times \dfrac{x^2}{x^2 + 765} = \dfrac{5{,}6x}{x^2 + 765}$

4. a) $f'(x) = 1 - \dfrac{765}{x^2} = \dfrac{\left(x - \sqrt{765}\right)\left(x + \sqrt{765}\right)}{x^2}$

Or, pour tout réel x de $]0\ ;\ 50[$:

- $x + \sqrt{765} > 0$
- $x^2 > 0$
- $x - \sqrt{765} > 0$ si $x > \sqrt{765}$

Donc $f'(x)$ est positive sur $\left[\sqrt{765} ; 50\right]$ et négative sur $\left]0 ; \sqrt{765}\right]$.

D'où :

x	0	$\sqrt{765}$	50
Variation de f	↘		↗

b) γ est maximale quand $\tan(\gamma)$ est maximale donc quand f est minimale, en effet, $\tan(\gamma) = \dfrac{5{,}6}{f(x)}$.

Donc γ est maximale pour $x = \sqrt{765}$.

c) $x = \sqrt{765} \approx 28$ m, d'où $\gamma = \arctan\left(\dfrac{5{,}6\sqrt{765}}{1\,530}\right) \approx 0{,}10$ à 0,01 radian près.

83. Formules de tangentes

1. a) $1 + \tan^2(x) = 1 + \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$

$= \dfrac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

b) $1+\dfrac{1}{\tan^2(x)}=1+\dfrac{1}{\dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}=1+\dfrac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}$

$=\dfrac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)}=\dfrac{1}{\sin^2(x)}$

2. $\tan(x) = 1$ signifie $\sin(x) = \cos(x)$.
Or $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, soit $2\cos^2(x) = 1$, soit $\cos^2(x)=\dfrac{1}{2}$, donc $\cos(x)=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Donc les couples possibles sont $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Comme il s'agit d'un angle aigu, on garde la solution $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

84. Calculs de tangentes

a) $\cos(x) = \sin(x)$ donc $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}=1$.

b) $\sin(x) = 7\cos(x)$, donc $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}=7$.

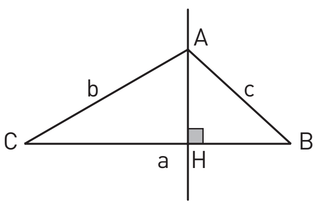
c) $5\cos(x) = 9\sin(x)$, donc $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}=\dfrac{5}{9}$.

d) $\dfrac{\sin(x)}{3}=\dfrac{4\cos(x)}{5}$,

donc $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}=\dfrac{12}{5}$.

85. Relations d'Al-Kashi

1.



2. a) $AH = c\sin(\beta)$

b) $\mathscr{A}=\dfrac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}=\dfrac{ac\sin(\beta)}{2}=\dfrac{1}{2}ac\sin(\beta)$

c) $\mathscr{A}=\dfrac{1}{2}ac\sin(\beta)=\dfrac{1}{2}bc\sin(\alpha)=\dfrac{1}{2}ab\sin(\gamma)$ donc :

$bc\sin(\alpha) = ac\sin(\beta) = ab\sin(\gamma)$.

En divisant tout par abc on obtient :

$\dfrac{\sin(\alpha)}{a}=\dfrac{\sin(\beta)}{b}=\dfrac{\sin(\gamma)}{c}$.

3. a) Le triangle ACH est rectangle en H, d'où, d'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AH^2 + CH^2$.

b) $AC^2 = AH^2 + CH^2$

$= AH^2 + (BC - BH)^2$

$= c^2\sin^2(\beta) + (a - c\cos(\beta))^2$

$= c^2\sin^2(\beta) + a^2 - 2ac\cos(\beta) + c^2\cos^2(\beta)$

$= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$

D'où $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$.

4. Dans les deux cas, on procède à des approximations.

• 1[re] méthode :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$

donc $64 = b^2 + 9 - 6b\cos(83°)$

d'où $b^2 - 6b\cos(83°) - 55 = 0$

$\Delta = (-6\cos(83°))^2 - 4 \times 1 \times (-55)$

$= 36\cos^2(83°) + 200$

$b_1=\dfrac{6\cos(83°)-\sqrt{36\cos^2(83°)+220}}{2}$

$\approx -7{,}06 < 0$

$b_2=\dfrac{6\cos(83°)+\sqrt{36\cos^2(83°)+220}}{2}$

$\approx 7{,}79$

Donc $AC = b \approx 7{,}79$.

En appliquant deux fois la formule d'Al-Kashi, on obtient $\beta = 75{,}1°$ puis $\gamma \approx 21{,}9°$.

• 2[e] méthode :

En utilisant la loi des sinus, on obtient :

$\dfrac{\sin(83°)}{8}=\dfrac{\sin(\gamma)}{3}$, d'où $\sin(\gamma)=\dfrac{3}{8}\sin(83°)$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient $\gamma \approx 21{,}9°$ arrondi au dixième.

D'où $\beta = 180° - \alpha - \gamma \approx 180° - 83° - 21{,}9° \approx 75{,}1°$.

On obtient :

$b^2 = 8^2 + 3^2 - 48\cos(75{,}1°) = 64 + 9 - 48\cos(75{,}1°)$

$= 64 + 9 - 48\cos(75{,}1°) = 73 - 48\cos(75{,}1°)$.

Donc $b \approx \sqrt{73-48\cos(75{,}1°)}$

$\approx \sqrt{60{,}66} \approx 7{,}79$.

86. Avec un paramètre

1. $f_m(-x) = \cos(-mx) = \cos(mx) = f_m(x)$, donc f_m est paire. Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. $f_m\left(x+\dfrac{2\pi}{m}\right)=\cos\left(m\left(x+\dfrac{2\pi}{m}\right)\right)$

$=\cos(mx+2\pi)=\cos(mx)=f_m(x)$

Donc f est $\dfrac{2\pi}{m}$-périodique.

3. Par périodicité, on peut étudier f sur $\left[0\ ;\dfrac{2\pi}{m}\right]$;

par parité, on peut l'étudier sur $\left[0\ ;\dfrac{\pi}{m}\right]$.

Si $m \leqslant 0$, on écrira $\left[\dfrac{\pi}{m}\ ;0\right]$.

4. a) Si $m \geqslant 0$ alors $0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{m}$, donc $0 \leqslant mx \leqslant \pi$, donc $\sin(mx) \geqslant 0$.

Donc $f'_m(x) \leqslant 0$.

Si $m \leqslant 0$ alors $\dfrac{\pi}{m}\leqslant x \leqslant 0$, donc $0 \leqslant mx \leqslant \pi$, donc $\sin(mx) \geqslant 0$.

Donc $f'_m(x) \geqslant 0$.

b) Si $m \geqslant 0$, alors f_m est décroissante sur $\left[0\ ;\dfrac{\pi}{m}\right]$.

Si $m \leqslant 0$, alors f_m est croissante sur $\left[\dfrac{\pi}{m}\ ;0\right]$.

c) Si $m \geqslant 0$, alors :

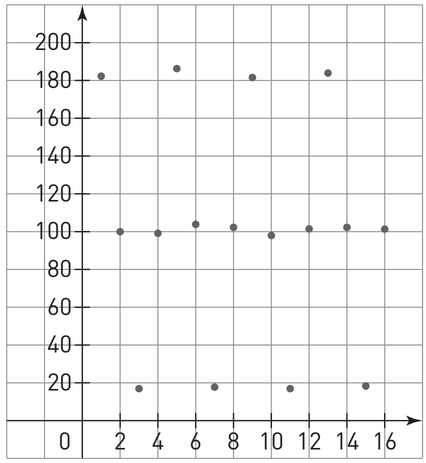
x	$-\dfrac{\pi}{m}$		0		$\dfrac{\pi}{m}$		$\dfrac{2\pi}{m}$
Variation de f_m		↗		↘		↗	

Si $m \leqslant 0$ alors :

x	$\dfrac{2\pi}{m}$		$\dfrac{\pi}{m}$		0		$-\dfrac{\pi}{m}$
Variation de f_m		↘		↗		↘	

87. Variations saisonnières

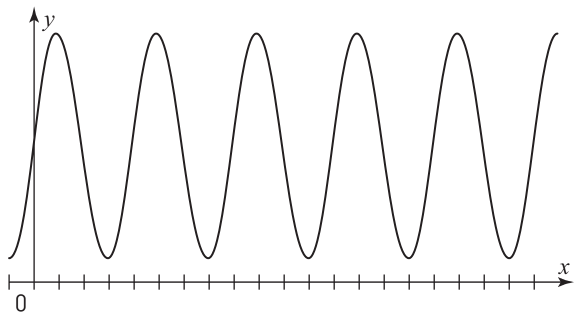
1.



2. Les variations semblent périodiques.

3. Le 1er trimestre est globalement le plus froid de l'année, donc les ventes de polaires sont importantes, contrairement au 3e trimestre qui est globalement le plus chaud de l'année, donc les ventes sont très minimes.

4. a)

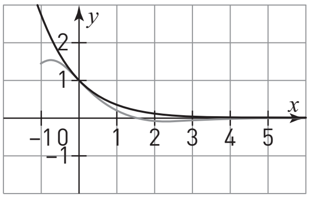


b) Pour 2019, l'étude porte sur les trimestres T17, T18, T19 et T20 :

- $f(17)=83\sin\left(17\times\dfrac{\pi}{2}\right)+100=183$;
- $f(18)=83\sin\left(17\times\dfrac{\pi}{2}\right)+100=100$;
- $f(19)=83\sin\left(17\times\dfrac{\pi}{2}\right)+100=17$;
- $f(20)=83\sin\left(17\times\dfrac{\pi}{2}\right)+100=100$.

Vers la Tle

88. 1.



2. D'après le graphique, $\mathscr{C}_f$ semble en dessous de $\mathscr{C}_g$. L'abscisse pour laquelle l'écart entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est maximal semble être $x = \frac{\pi}{2}$.

3. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$. Or e^{-x} est strictement positif, d'où $-e^{-x} \leqslant e^{-x}\cos(x) \leqslant e^{-x}$, soit $-e^{-x} \leqslant e^{-x}\cos(x) \leqslant e^{-x}$, $-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Donc $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur $[0\,;+\infty[$.

4. a) e^{-x} est strictement positif. De plus, sur $[0\,;2\pi]$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1 \geqslant 0$ si $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit

$-\frac{\pi}{4} \leqslant x-\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{4'}$, d'où $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Donc $h'(x)$

est positive sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et négative sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;2\pi\right]$.

b)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	2π
Variation de h		↗ ↘	

c) $m = h\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}}$

89. 1. $f_m(-x) = 5(-x) + m\sin(-x) = -5x - m\sin(x) = -(5 + m\sin(x)) = -f_m(x)$ donc f_m est impaire.

Graphiquement, la courbe représentative de f_m est symétrique par rapport à l'origine du repère.

2. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc, comme m est positif, $-m \leqslant m\sin(x) \leqslant m$, soit $5x - m \leqslant 5x + m\sin(x) \leqslant 5x + m$.

Donc la courbe représentative de f_m est située entre les droites d'équations $y = 5x - m$ et $y = 5x + m$.

90. 1. $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - f(x)$

$= e^{-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - e^{-x}\cos(x)$

$= e^{-x}\left(-e^{-\frac{\pi}{2}}\sin(x) - \cos(x)\right) \neq 0$

pour $x = 0$ par exemple, donc f n'est pas périodique de période $\frac{\pi}{2}$.

Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de f ne présente pas une répétition du « même motif de courbe de longueur $\frac{\pi}{2}$ ».

2. Pour tout réel $x \geqslant 0$, $-1 \leqslant \cos(4x) \leqslant 1$.
Or e^{-x} est strictement positif, d'où $e^{-x}\cos(4x) \leqslant e^{-x}$, soit $f(x) \leqslant g(x)$. Donc $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$.

3. a) $u_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}\cos\left(4\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = e^{-\frac{n\pi}{2}}\cos(2n\pi) = e^{-\frac{n\pi}{2}}$

$u_{n+1} = e^{-\frac{(n+1)\pi}{2}} = e^{-\frac{n\pi}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}u_n$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

b) Comme la suite (u_n) est à termes positifs et que $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

c) Comme la suite (u_n) est à termes positifs et que $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) a pour limite 0.

4. a) $v_n = f(n) = e^{-n}\cos(4n)$.

Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos(4n) \leqslant 1$ d'où $-e^{-n} \leqslant -e^{-n}\cos(4n) \leqslant -e^{-n}$, soit $-e^{-n} \leqslant v_n \leqslant e^{-n}$.

b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-e^{-n}) = 0$ alors, d'après le théorème des gendarmes, (v_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Travaux pratiques p. 216-217

TP 1. Étudier l'origine des tables trigonométriques

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectifs :** Faire le lien entre cercle, triangle et tables trigonométriques. Comparer les résultats obtenus avec ceux de la calculatrice.

1. a) Quelques points importants concernant Claude Ptolémée :

• IIe siècle après J.-C.

• Mathématiques en lien avec l'astronomie et la géographie.

• Traité *L'Almageste* ou *La Composition Mathématique*.

• Modèle géocentrique repris d'Hipparque.

• Traité *L'Optique* : réflexion et réfraction.

b) • circonférence : longueur d'un cercle.

• **arc :** portion limitée d'un seul tenant d'une courbe quelconque.

• **degré :** unité de mesure d'angle plan (symbole °), égale à la quatre-vingt-dixième partie de l'angle droit.

• **soutendante :** corde du cercle.

• **numération sexagésimale :** numération en base 60.

• **accroissement :** augmentation en quantité, en valeur, en intensité.

• **proportionnelle :** se dit d'une quantité qui reste dans son rapport de proportion avec une autre.

c) Le rayon utilisé par Ptolémée est égal à 60 unités.

2. a) Le triangle OAH est rectangle en H, d'où

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{AH}{OA} = \frac{AH}{60}$, d'où $AH = 60\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

b) $\text{corde}(\alpha) = AB = 2AH = 2\times 60\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 120\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

3. a) corde(5°) = 120sin(2,5°) ≈ 5,2343 au dix-millième près.

b) À l'aide de la table, on trouve :

$\text{corde}(5°) = 5 + \frac{14}{60} + \frac{4}{3600} \approx 5{,}2344$, au dix-millième près.

On constate un écart de 1 dix-millième par rapport à la valeur obtenue à la question précédente.

TP 2. Calcul des décimales de Pi

• **Durée estimée :** 50 min

• **Objectif :** Calculer les décimales de π à la façon d'Archimède à l'aide d'un tableur ou d'un algorithme.

A. 1. OA = 1.

2. Le triangle OAC est isocèle en O. (OT) est donc une médiatrice et le triangle AOT est rectangle en T, d'où $\sin(\widehat{TOA}) = \frac{AT}{OA} = AT$. (OT) est donc également une bissectrice et $\widehat{TOA} = \frac{\alpha}{2}$.

D'où $AT = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

3. $AC = 2AT = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ d'où $P_1 = 6 \times AC = 12\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

4. Pour P_2, il y a à présent 12 côtés (le double du précédent polygone) et chaque côté a pour longueur $2\sin\left(\frac{\alpha}{2^2}\right)$, d'où :

$P_2 = 24\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) = 3 \times 2^{2+1}\sin\left(\frac{\alpha}{2^2}\right)$.

Conjecture : $P_n = 3 \times 2^{n+1}\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$.

B. 1. OC = 1

2. Le triangle OMN est isocèle en O. (OC) est donc une médiatrice et le triangle OCN est rectangle en C, d'où $\tan(\widehat{NOC}) = \frac{CN}{OC} = CN$. (OT) est donc également une bissectrice et $\widehat{NOC} = \frac{\alpha}{2}$.

D'où $CN = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

3. $MN = 2CN = 2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, d'où $Q_1 = 6 \times CN = 12\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

4. Pour Q_2, il y a à présent 12 côtés (le double du précédent polygone) et chaque côté a pour longueur :

$2\tan\left(\frac{\alpha}{2^2}\right)$ d'où $Q_2 = 24\tan\left(\frac{\alpha}{4}\right) = 3 \times 2^{2+1}\tan\left(\frac{\alpha}{2^2}\right)$.

Conjecture : $Q_n = 3 \times 2^{n+1}\tan\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$.

C. 1. Voir la feuille de calcul.

2. Il faut rentrer :

• En D3 : `=2*SIN(RADIANS(C3)/2)`

• En E3 : `=D3*B3`

• En F3 : `=E3/2`

• En G3 : `=2*TAN(RADIANS(C3)/2)`

• En H3 : `=G3*B3`

• En I3 : `=H3/2`

3. On obtient $3{,}141590 \leqslant \pi \leqslant 3{,}141597$. D'où, à 5 décimales, $\pi \approx 3{,}14159$

D. 1. Cet algorithme permet de calculer des valeurs approchées des périmètres P_n et Q_n.

2.

```
import math
n=2
N=3
a=120
I=0
S=1
while S-I>10**(-6):
  a=a/2
  N=2*N
  I=N*2*math.sin(math.radians(a)/2)/2
  S=N*2*math.tan(math.radians(a)/2)/2
  n=n-1
print("Nombre minimal côté =",N)
```

En exécutant ce programme, on obtient, pour une précision de 10^{-6}, un nombre minimal de côtés égal à 6 144.

En autonomie p. 218-219

Placer un point sur le cercle trigonométrique

91. **a** **92.** **c**

93. **a** **94.** **b**

95. 1. I_0

2. $J_{\frac{\pi}{2}}$; $D_{-\frac{3\pi}{4}}$; $F_{-\frac{\pi}{3}}$

3. Les réels associés aux points C et G sont distants de $\pi + 2k\pi$.

96. 1. $\frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} = 2\pi$, donc ces réels ont le même point-image sur le cercle trigonométrique.

2. $20\pi - (-12\pi) = 32\pi = 16 \times (2\pi)$, donc ces réels ont le même point-image sur le cercle trigonométrique.

97. 1. π est un réel ayant pour image le sens « O ».

2. $-\frac{\pi}{2}$ est un réel ayant pour image le sens « S ».

3. $\frac{\pi}{4}$ est un réel ayant pour image le sens « NE ».

4. a) $\frac{\pi}{3}$ est un réel ayant pour image le sens « NNE ».

b) $-\frac{\pi}{3}$ est un réel ayant pour image le sens « SSE ».

c) $\frac{2\pi}{3}$ est un réel ayant pour image le sens « NNO ».

Déterminer le sinus et le cosinus d'un réel

98. **c** **99.** **b**

100. **c** **101.** **a**

102. $A = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$$B = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$C = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

103. $D = -\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{41\pi}{3}\right)$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$E = \sin\left(-\frac{87\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{21\pi}{6}\right)$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$F = \frac{\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{51\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{11\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$$

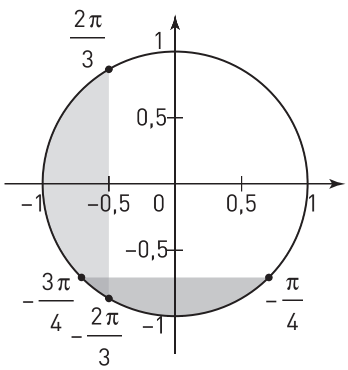
$$= \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = -1 - \sqrt{2}$$

Résoudre une équation ou une inéquation trigonométrique

104. **a** et **c** **105.** **c** **106.** **a**, **b** et **d**

107. $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

108. On trace les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et on colorie les zones autorisées par les inéquations.



$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left[-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\ ;-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right],\ k \in \mathbb{Z}$$

109. 1. $2\cos(x) = -\sqrt{3}$ si $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\mathcal{S}_{]-\pi\,;\,\pi]} = \left\{-\frac{5\pi}{6}\ ;\frac{5\pi}{6}\right\}$$

Donc $\mathcal{S}_{[0\,;\,2\pi[} = \left\{\frac{5\pi}{6}\ ;\frac{7\pi}{6}\right\}$.

2. $2\sqrt{2}\sin(x) = -\sqrt{6}$ si $\sin(x) = -\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\mathcal{S}_{]-\pi\,;\,\pi]} = \left\{-\frac{2\pi}{3}\ ;-\frac{\pi}{3}\right\}$$

Donc $\mathcal{S}_{[2\pi\,;\,4\pi[} = \left\{\frac{10\pi}{3}\ ;\frac{11\pi}{3}\right\}$.

110. 1. $4\cos(x) > -\sqrt{12}$ si $\cos(x) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\mathcal{S}_{]-\pi\,;\,\pi]} = \left]-\frac{5\pi}{6}\ ;\frac{5\pi}{6}\right[$$

2. $\sqrt{2}\sin(x) < 1$ si $\sin(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

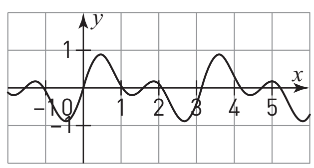
$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left]-\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\ ;\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right[,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{S}_{\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right]} = \left]-\frac{\pi}{2}\ ;0\right]$$

Exploiter les propriétés des fonctions sinus et cosinus

111. **a** et **c** **112.** **c** **113.** **b** et **d**

114. 1.



2. $f(x + \pi) = \cos(x + \pi)\sin(3(x + \pi))$

$= (-\cos(x))(\sin(3x + 3\pi)) = (-\cos(x))(-\sin(3x))$

$= (\cos(x)\sin(3x) = f(x)$

Donc f est π-périodique. Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de f présente une répétition du « même motif de courbe de longueur π ».

3. $f(-x) = \cos(-x)\sin(-3x)$

$= \cos(x)\,(-(\sin(3x)) = -\cos(x)\sin(3x) = -f(x)$

Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

115. 1. $M\left(-\dfrac{\pi}{2}\,;2\right) \in \mathscr{C}_f$

$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$

$a\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + b\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$

$a \times 0 + b \times (-1) = 2$

$-b = 2$

Donc $b = -2$.

De même, $N\left(\dfrac{\pi}{4}\,;\sqrt{2}\right) \in \mathscr{C}_f$

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

$a\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + b\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

$a \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} + b \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$a + b = 2$

Donc $a = 2 - b = 2 - (-2) = 4$.

2. $f(x) = 4\cos(x) - 2\sin(x)$

3. $f(x + 2\pi) = 4\cos(x + 2\pi) - 2\sin(x + 2\pi)$

$= 4\cos(x) - 2\sin(x) = f(x)$, donc f est 2π -périodique.

Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de f présente une répétition du « même motif de courbe de longueur 2π ».

4. $f(x) + f(-x) = 4\cos(x) - 2\sin(x) + 4\cos(-x) - 2\sin(-x)$

$= 8\cos(x) \neq 0$ pour $x \notin \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$ donc f n'est pas impaire.

De même, $f(x) - f(-x) = -4\sin(x) \neq 0$ pour $x \notin \{\pi + k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$ donc f n'est pas paire.

Donc f n'est ni paire ni impaire.

116. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ d'où $x - 1 \leqslant x + \sin(x) \leqslant x + 1$, d'où $x - 1 \leqslant f(x) \leqslant x + 1$. Donc la courbe représentative de f est située entre les droites d'équations $y = x - 1$ et $y = x + 1$.

CHAPITRE 8 Calcul vectoriel et produit scalaire

Manuel p. 222-245

I. Introduction

Objectifs du chapitre

Il s'agit de découvrir une nouvelle opération qui s'applique aux vecteurs et qui a une application importante en physique.

On verra également une application sur les ensembles de points qui peut se prolonger.

Capacités

- → Calculer un produit scalaire avec la projection.
- → Calculer un produit scalaire avec des coordonnées ou un angle.
- → Démontrer une orthogonalité de vecteurs ou une perpendicularité de droites.
- → Calculer des angles.
- → Calculer des longueurs.
- → Déterminer un ensemble de points.

II. Corrigés des activités et exercices

Pour prendre un bon départ

p. 223

1. Faire des projections orthogonales

Le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) est F.

Le projeté orthogonal de E sur la droite (AB) est B.

Le projeté orthogonal de B sur la droite (AF) est B.

Le projeté orthogonal de D sur la droite (BC) est B.

Le projeté orthogonal de F sur la droite (CD) est C.

2. Calculer avec des coordonnées

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-4\\-8\end{pmatrix}$

2. $AB=\sqrt{26}$, $BD=\sqrt{10}$, $CD=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

3. Le milieu de [AB] a pour coordonnées $\left(-\dfrac{3}{2};\ \dfrac{1}{2}\right)$.

Le milieu de [CD] a pour coordonnées (2 ; –1).

3. Savoir additionner des vecteurs avec la relation de Chasles ou pas…

a) $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{CB}$

c) $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}$

e) AB + AE = 3 + 5 = 8 (avec $AE=\sqrt{AB^2+BE^2}$ dans le triangle ABE rectangle en B).

f) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FC}$

g) $BA+AC=3+\sqrt{73}$ (avec $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}$ dans le triangle ABE rectangle en B).

h) $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AE}$
$=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}$

i) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$

4. Revoir la trigonométrie

a) $AC^2+BC^2=64+36=100=AB^2$ donc le triangle ABC est rectangle en C.

b) $\cos(\widehat{BAC})=\dfrac{AC}{AB}=0{,}8$

c) $\widehat{BAC}\approx 36{,}87°$

5. Déterminer des valeurs remarquables

1. a) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$

2. a) $\cos(150°)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\cos(45°)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos(120°)=-\dfrac{1}{2}$ **d)** $\cos(30°)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. Donner un vecteur directeur

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$

Activités p. 224-225

Activité 1. Des triangles presque rectangles

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Découvrir une nouvelle opération à partir de relations dans un triangle quelconque.

1. 2. 3. Construction GeoGebra.

4. D'après le théorème de Pythagore on a :
$AB^2 = AH^2 + HB^2$ et $BC^2 = BH^2 + CH^2$.

Donc $P = \frac{1}{2}(AH^2 + HB^2 + AC^2 - BH^2 - CH^2)$

$= \frac{1}{2}(AH^2 + AC^2 - CH^2)$

5. a) $CH^2 = (AC - AH)^2 = AC^2 + AH^2 - 2AC \times AH$, d'où le résultat.

b) Même démonstration en partant de $CH^2 = (AC - AH)^2$.

c) Ici $CH^2 = (AC + AH)^2 = AC^2 + AH^2 + 2AC \times AH$, d'où le signe.

6. Donc $P = AC \times AB \times \cos(\widehat{BAC})$.

Activité 2. Avec des coordonnées

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Découvrir une autre définition du produit scalaire avec les coordonnées.

A. Cas particulier

1. $AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ et $BC = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

2. D'où ABC est rectangle en A et P = 0.

B. Cas général

1. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{v} - \vec{u}$

2. $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $||\vec{v}|| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ et

$||\vec{v} - \vec{u}|| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$

3. $P = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - (x^2 + x'^2 - 2xx' + y^2 + y'^2 - 2yy'))$

$= xx' + yy'$

4. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$ alors

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2(-3) + (-2)(-3) = 0.$

Activité 3. Ensemble de points

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Découvrir une autre définition du produit scalaire avec un ensemble de points.

A. Détermination des valeurs particulières

1. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

2. $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -\frac{1}{4}AB^2 = -9$

3. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2$ donc pas constante

B. Manipulation avec GeoGebra

1. à **5.** Construction avec GeoGebra.

6. On conjecture que M est sur un cercle de diamètre [AB].

C. Étude du cas $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

1. a) La médiatrice de [MA] est l'ensemble des points équidistants de M et de A, or IA = IM = rayon donc I est sur cette médiatrice. De même il est sur la médiatrice de [MB].

b) MHIK est un rectangle car il a deux angles droits opposés (médiatrices) et les côtés opposés parallèles (droite des milieux sur le triangle MAB) et de même longueur.

c) Donc MAB est rectangle.

2. L'ensemble des points est le cercle de diamètre [AB].

D. Étude du cas $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

2. Le produit scalaire reste nul.

3. Le produit scalaire n'est pas nul.

4. $(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2$

5. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2$

6. On a l'égalité : $MI^2 = k + \frac{1}{4}AB^2$.

À vous de jouer p. 230-233

1. a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ **b)** $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = 36$

c) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = BC^2 = 36$ **d)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}AB^2 = 18$

2. a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}AB^2 = 18$ **b)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2}AB^2 = -18$

c) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2}AB^2 = -18$

3. a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 5\times 3 = 15$

b) $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BC} = 8\times 3 = 24$

c) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA} = -AD^2 = -16$

4. a) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}AC^2 = -32$

b) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$

c) $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB} = DA^2 = 25$

d) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}AC^2 = 32$

5. a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times 5\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times 7\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{21}{2}\sqrt{2}$

6. a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 3\times 5\times\cos 110 \approx -5{,}13$

b) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$

7. $AB = \sqrt{10}$

$AC = \sqrt{65}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (-3)\times(-1)+1\times 8 = 11$

d'où : $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{11}{\sqrt{10}\sqrt{65}}$

qui donne : $\widehat{BAC} \approx 1{,}12$.

8. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}-4\\-5\end{pmatrix}$ donc

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP} = 16+15 = 31$ et alors $\cos(\widehat{NMP}) = \dfrac{31}{5\sqrt{41}}$

d'où $\widehat{NMP} \approx 14{,}47°$

9. $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$ donc

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF} = 0$ d'où $\widehat{EDF} = 90°$

10. a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = -8-15 = -23$

b) $(-2\vec{u})\cdot\vec{v} = 46$

c) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{u} = 25-23 = 2$

d) $(5\vec{u})\cdot(3\vec{v}) = -345$

11. a) $\vec{w}\cdot\vec{v} = (3-4)+(6-5) = 0$

b) $(-4\vec{w})\cdot(2\vec{v}) = -8\vec{w}\cdot\vec{v} = 0$

c) $(\vec{w}+3\vec{v})\cdot(2\vec{w}) = 2\vec{w}^2+6\vec{w}\cdot\vec{v} = 2((\sqrt{3}-2)^2+(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2)$

$= 2(18-4\sqrt{3}-2\sqrt{30})$

d) $(-5\vec{w})\cdot(-\vec{v}) = 5\vec{w}\cdot\vec{v} = 0$

12. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$ puis : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$, donc (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

13. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ et le triangle est rectangle en B.

14. $MP^2 = MN^2 + NP^2 - 2\times MN\times NP\times\cos(\widehat{MNP})$

$= 9+25-30\frac{\sqrt{2}}{2} = 34-15\sqrt{2}$

Donc $MP = \sqrt{34-15\sqrt{2}} \approx 3{,}58$.

15. $DE^2 = EF^2 + DF^2 - 2\times EF\times DF\cos(\widehat{EFD})$

$= 25+36-60\cos(70°)$

Donc $DE = \sqrt{61-60\cos(70°)} \approx 6{,}36$

16. $\cos(\widehat{GFH}) = \dfrac{GF^2+FH^2-GH^2}{2\times GF\times FH} = \dfrac{25+81-49}{90}$

$= \frac{57}{90} = \frac{19}{30}$

d'où $\widehat{GFH} \approx 50{,}7°$.

17. $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ} = -8 = MI^2 - \frac{1}{4}PQ^2 = MI^2 - 25$ donne $MI^2 = 17$ et M appartient au cercle de centre le milieu de [PQ] et de rayon $\sqrt{17}$.

18. $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD} = MI^2 = \frac{1}{4}CD^2 = MI^2 - 4$

Donc $MI^2 = 0$, soit M = I et l'ensemble est le point I milieu de [CD].

Exercices d'application p. 234-235

Apprendre à apprendre

19. c) **20. b)**

21. a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

b) $xx' + yy' = 0$ équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux.

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

d) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

Questions – Flash

22. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 2 \times 7 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$

23. Quand on projette le point B sur la droite (AC) on obtient le milieu de [AC] car le triangle est équilatéral, et donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}AC \times AC = \dfrac{9}{2}$.

24. Le projeté du point C sur la droite (AB) est le point B, donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AB = 36$.

25. $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3 \times 1 + 2 \times 0 = -3$

26. D'abord on calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$, puis :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -5 \times (-2) + (-2)(-5) = 20$.

27. $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = 3^2 + 2 \times 6 + 4^2 = 37$

28. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$$\Leftrightarrow -3 = 2 \times 3 \times \cos(\widehat{BAC}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = -\frac{1}{2}$$

et donc : $\widehat{BAC} = \dfrac{2\pi}{3}$.

29. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 0 \Leftrightarrow MI = IA$ où I est le milieu de [AB] et donc M appartient au cercle de centre I et de diamètre AB.

30. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 2 \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 2 \Leftrightarrow MI^2 - 2^2 = 2^2$

$$\Leftrightarrow MI^2 = 8 \Leftrightarrow MI = 2\sqrt{2}$$

où I est le milieu de [AB] et donc M appartient au cercle de centre I et de rayon $2\sqrt{2}$.

Calculer un produit scalaire avec sa projection

31. a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO} = \dfrac{1}{2}AB^2 = 32$

b) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD} = -OB^2 = -32$

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$

d) $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}BC^2 = 32$

32. a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -AB^2 = -64$

b) $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{OD} = BO^2 = 32$

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OD} = -\dfrac{1}{2}AB^2 = -32$

d) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{DO} = BO^2 = 32$

33. a) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BE} = -\dfrac{1}{2}AB^2$ **b)** $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{CD} = \dfrac{1}{2}CD^2$

c) $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}AB^2$ **d)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE} = \dfrac{1}{2}AB^2$

e) $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DC} = -\dfrac{1}{2}DC^2$ **f)** $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE} = AF^2$

Calculer un produit scalaire avec un angle

34. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 5 \times \sqrt{3} \times \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

35. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 \times 3 \times \cos(60°) = 3\sqrt{3}$

36. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 5 \times 5\sqrt{2} \times \cos(45°) = 25$

37. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 7 \times \sqrt{5} \times \cos(120°) = -\dfrac{7\sqrt{5}}{2}$

Calculer un angle

38. $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 45°$.

39. $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = -\dfrac{1}{2}$ donc l'angle vaut 120°.

40. $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \dfrac{0{,}5}{2\sqrt{3}}$ donc l'angle vaut environ 81,7°.

41. a) $AB = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$, $AC = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 17$.

Donc $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{17}{17\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\widehat{BAC} = 45°$.

b) $AB = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$, $AC = \sqrt{0 + 5^2} = 5$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 25$.

Donc $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{25}{5\sqrt{26}}$ et $\widehat{BAC} \approx 11{,}3°$.

42. $OA = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $OB = 3$ et $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 6$.

Donc $\cos(\widehat{BOA}) = \dfrac{6}{6\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\widehat{BOA} = 45°$.

Calculer un produit scalaire avec des coordonnées

43. a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -7$

b) $\vec{w} \cdot \vec{v} = -7$

c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = -4 + 3 = -1$

d) $(-2\vec{u}) \cdot \vec{v} + 3(\vec{v} \cdot \vec{w}) = 14 - 21 = -7$

44. a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -13$

b) $(4\vec{u}) \cdot \vec{v} = -52$

c) $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 13 - 26 = -13$

45. a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 - 30 = -29$

b) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BD} = -3 - 42 = -45$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2 - 5 = -3$

d) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = -4 + 10 = 6$

Démontrer une orthogonalité de vecteurs ou une perpendicularité de droites

46. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 24 + (-24) = 0$, donc les vecteurs sont orthogonaux.

47. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0$.

48. $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{FG} = 0$.

49. $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS} = 0$.

50. $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{TH}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{TH} = 0$.

51. a) $\vec{u}_1\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$.

b) $\vec{u}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$.

c) $\vec{u}_1\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$.

Utiliser la formule d'Al-Kashi

52. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$$= 9 + 16 - 24\left(-\frac{1}{2}\right) = 37$$

donc $BC = \sqrt{37}$.

53. $MP^2 = MN^2 + NP^2 - 2MN \times NP\cos(\widehat{MNP})$

$$= 25 + 49 - 70\cos 61$$

D'où $MP \approx 6{,}33$.

54. $\cos(\widehat{EFG}) = \dfrac{EF^2 + FG^2 - EG^2}{2EF \times FG} = \dfrac{49 + 36 - 121}{84} = -\dfrac{3}{7}$

d'où $\widehat{EFG} \approx 115{,}4°$

55. $\cos(\widehat{EDF}) = \dfrac{ED^2 + FD^2 - EF^2}{2ED \times FD} = \dfrac{81 + 64 - 25}{144} = \dfrac{5}{6}$

d'où $\widehat{EDF} \approx 33{,}6°$.

Utiliser des propriétés algébriques

56. a) $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a^2 + 0 = a^2$

b) $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 - 3b^2 = -3b^2$

c) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = a^2 + b^2$

57. a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3\vec{u}^2 = 3a^2$

b) $\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = 3a^2 + 0 = 3a^2$

c) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = a^2 + 9a^2 + 6a^2 = 16a^2$

d) $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w}^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2$

58. a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (-\overrightarrow{BA}) \cdot (-\overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC}$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED}$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

$$= \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$$

Déterminer un ensemble de points

59. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 4 = MI^2 - \dfrac{1}{4}AB^2 = MI^2 - 36$ donne

$MI^2 = 40$ et M appartient au cercle de centre le milieu de [AB] et de rayon $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

60. $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD} = MI^2 - \frac{1}{4}CD^2 = MI^2 - 25$ d'où $MI^2 = 16$ et M appartient au cercle de centre le milieu de [CD] et de rayon 4.

61. 1. $AB = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5\sqrt{2}$

2. Milieu $\left(-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.

3. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = MI^2 - \frac{25}{2}$ d'où $MI^2 = \frac{25}{2}$ et M appartient au cercle de centre le milieu de [AB] et de rayon $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

Calculs et automatismes

62. a) $a^2 - b^2$ **b)** $4ab$
c) $2(a^2 + b^2)$ **d)** $(a^2 - b^2)^2$

63. a) 1 **b)** $6\sqrt{2}$
c) $6 + 2\sqrt{2}$ **d)** $9 - 6\sqrt{2}$

Exercices d'entraînement p. 236-238

Calculer des produits scalaires

64. a) $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CK} = CK^2 = 4$
b) $\overrightarrow{CJ}\cdot\overrightarrow{LJ} = 0$
c) $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{KL} = -IJ^2 = -8$
d) $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IL} = 0$
e) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BK} = -\frac{1}{2}AB^2 = -8$
f) $\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{IJ} = DK^2 = 4$
g) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{KL} = -AO^2 = -8$
h) $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OI} = -OI^2 = -4$

65. 1. a) $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{AD} = -AD^2 = -9$
b) $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}CD^2 = -32$
c) $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{ID} = -IB^2 = -16$
d) $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{JD} = -\frac{1}{2}AB^2 = -32$

2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}AB^2 = 32$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}BC^2 = \frac{9}{2}$

3. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{IJ} = \frac{73}{2}$

66. 1. a) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = AB^2 = 64$
b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} = CD^2 = 64$
c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DB} = AB^2 = 64$
d) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$

2. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}BC^2 = 32$ et $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}BC^2 = -32$.

3. a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE} = AB \times IE = 32\sqrt{3}$
b) $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CD} = -CD \times IE = -32\sqrt{3}$
c) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{EI} = AB \times IE = 32\sqrt{3}$

67. a) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{FC} = CB^2 = a^2$
b) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AI} = 0$
c) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CI} = -\frac{1}{2}CB^2 = -\frac{1}{2}a^2$
d) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{IF} = -\frac{1}{2}CB^2 = -\frac{1}{2}a^2$

Démontrer une orthogonalité de vecteurs ou une perpendicularité de droites

68. 1. A(0 ; 0) B(1 ; 0) C(0 ; 1) I(0,5 ; 0) J(0,5 ; 0,5) et K(0 ; 0,5)

2. $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{IK} = 0$

3. (AJ) et (IK) sont perpendiculaires.

69. 1. A(0 ; 0) G(1 ; 0) E(0 ; 1) B(8 ; 0) C(8 ; 4) D(0 ; 4) et F(8 ; 3).

2. $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DG} = 0$.

3. (EF) et (DG) sont perpendiculaires.

Introduire le bon point à l'aide de la relation de Chasles

70. 1. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{DB} = HK \times DB = HK\sqrt{58}$

2. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$
$= DC^2 - BC^2 = 40$

3. $HK = \frac{40}{\sqrt{58}}$

71. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AC^2$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$
$= 0 + AB \times DC$
D'où $AC^2 = AB \times DC$.

72. 1. $\overrightarrow{KJ}\cdot\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}AB^2=18$ et $\overrightarrow{KJ}\cdot\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{2}DA^2=-18$

2. D'où $\overrightarrow{KJ}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{KJ}\cdot\overrightarrow{DA}=0=\overrightarrow{KJ}\cdot\overrightarrow{DI}$ et les droites sont perpendiculaires.

73. A. 1. A(0 ; 0) B(1 ; 0) D(0 ; 1) C(1 ; 1) E(1 + a ; 0) F(1 + a ; a) et G(1 ; a).

2. $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}a\\-1\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CE}=0$ et les droites sont perpendiculaires.

B. 1.
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG})\cdot(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE})&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}\\&+\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BE}\\&=0+AB\times BE-BC\times BG+0\\&=a-a=0\end{aligned}$$

2. Donc $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CE}=0$.

74. A. 1. A(0 ; 0) B(1 ; 0) D(0 ; 1) C(1 ; 1) E(0,5 ; 0) et F(1 ; 0,5).

2. $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}1\\0{,}5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}0{,}5\\-1\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DE}=0$ et les droites sont perpendiculaires.

B. 1.
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF})&=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BF}\\&+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}\\&=0-0{,}5+0{,}5+0=0\end{aligned}$$

2. Donc $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DE}=0$.

75. A. 1. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AI}$ car I est milieu de [DE].

2.
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG})&=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AG}\\&+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AG}\\&=0-AD\times AG+BA\times AE+0\\&=ab-ab=0\end{aligned}$$

3. Donc $2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BG}=0$.

B. 1. A(0 ; 0) B(1 ; 0) D(0 ; 1) C(1 ; 1) E($-b$; 0) F($-b$; $-b$) G(0 ; $-b$) et I$\left(-\frac{b}{2};\frac{1}{2}\right)$.

2. $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-b/2\\1/2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}-1\\-b\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BG}=0$ et les droites sont perpendiculaires.

76. 1.
$$\begin{aligned}CA^2+CB^2&=(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IB})^2\\&=2CI^2+2\overrightarrow{CI}\cdot(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})+IA^2+IB^2\\&=2CI^2+\frac{1}{2}AB^2\end{aligned}$$

2. D'où $25+49=2CI^2+\frac{9}{2}$ et donc $CI^2=\frac{139}{4}$ soit $CI=\frac{\sqrt{139}}{2}$.

77. 1.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{JA})\cdot(\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{JC})\\&=BJ^2+\overrightarrow{BJ}\cdot(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JC})+\overrightarrow{JA}\cdot\overrightarrow{JC}\\&=BJ^2+\overrightarrow{JA}\cdot\overrightarrow{JC}\end{aligned}$$

2. D'où $-5=BJ^2-\frac{1}{4}AC^2=BJ^2-16$.

Donc $BJ=\sqrt{11}$.

78. 1. A(0 ; 0) B(a ; 0) D(0 ; b) C(a ; b)

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}a\\-b\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=a^2-b^2$

2.
$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}\\&=0+AB^2-AD^2+0=a^2-b^2\end{aligned}$$

Chercher un ensemble de points

79. $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MK}=MI^2-\frac{1}{4}DK^2=MI^2-\frac{25}{4}$

Donc $MI^2=9$, et l'ensemble est le cercle de centre le point I milieu de [DK] et de rayon 3.

80. $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MN}=MI^2-\frac{1}{4}GN^2=MI^2-\frac{49}{4}$

Donc $MI^2=\frac{27}{4}$, et l'ensemble est le cercle de centre le point I milieu de [GN] et de rayon $\frac{3}{2}$.

81. $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MV}=MI^2-\frac{1}{4}CV^2=MI^2-16$

Donc $MI^2=12$, et l'ensemble est le cercle de centre le point I milieu de [CV] et de rayon $2\sqrt{3}$.

82. $\overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=\overrightarrow{MA}\cdot2\overrightarrow{MA'}=0$

Donc l'ensemble est le cercle de diamètre [AA'].

83. 1. Γ_1 est le cercle de diamètre [AC].

2. Γ_2 est le cercle de diamètre [BD].

3. ABCD est un rectangle, donc AC = BD et les deux segments [AC] et [BD] ont le même milieu qui est le centre de Γ_1 et Γ_2.

84. 1. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = CI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

2. ABC rectangle en C, donc le produit scalaire $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ est nul donc $CI = \frac{1}{2}AB$.

3. A, B et C sont sur le cercle de centre I et de rayon $\frac{1}{2}AB$.

85. 1. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BO^2 - \frac{1}{4}AC^2 = \frac{1}{4}(BD^2 - AC^2)$

2. ABCD rectangle donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ donc AC = BD et réciproquement.

Des démonstrations

86. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{KD})$

$$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HK} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{KD}$$

$$= 0 + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HK} + 0 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HK}$$

87. $\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix} x'+x'' \\ y'+y'' \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = x(x'+x) + y(y'+y'')$

$= xx' + yy' + xx + yy'' = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

88. A. 1. $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2} = bb' + aa'$ donc $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont orthogonaux si $aa' + bb' = 0$.

B. 1. $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2} = 1 + mm'$ donc $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont orthogonaux si $mm' = -1$.

C. 1. $m = -\frac{a}{b}$ et de même $m' = -\frac{a'}{b'}$.

2. $mm' = \frac{aa'}{bb'}$ d'où l'équivalence.

Algorithmes

89. Il calcule le produit scalaire de deux vecteurs.

90. Cet algorithme calcule le carré de la longueur de la médiane issue de A dans le triangle ABC.

91. Il calcule l'angle entre deux vecteurs.

92. 1. $||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$

$$- (\vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2) = 4\vec{u}\cdot\vec{v}$$

2. a) $(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB})^2 - (\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB})^2 = 4\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$

mais $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AD}$

d'où $(2\overrightarrow{AB})^2 - (2\overrightarrow{AD})^2 = 4\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$

Et donc la relation annoncée

b) Si les diagonales sont perpendiculaires $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = 0$ d'où AB = AD et ABCD est un losange.

93. Les propositions **a)** et **d)** sont vraies.

94. a) Parallélogramme avec diagonales de même longueur : donc c'est un rectangle.

b) Parallélogramme avec diagonales perpendiculaires : donc c'est un losange.

c) A et C sont confondus.

d) Parallélogramme avec deux côtés de même longueur et un angle droit donc c'est un carré.

Travailler autrement

95. M doit être le centre du cercle exinscrit dans l'angle A du triangle ABC. Il est sur la bissectrice intérieure de l'angle en A et les bissectrices extérieures en B et C, et de plus il est tangent au segment [BC] et aux droites (AB) et (AC).

96. On considère le quadrilatère BNDM et ses propriétés, et qui pour que M et N soient les projetés orthogonaux doit être un carré. Et par conséquent ABCD aussi doit être un carré.

Exercices bilan p. 239

97. Pied de hauteur

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 35$.

2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AH = 7AH$ donc AH = 5.

3. $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \dfrac{35}{7\sqrt{41}}$ d'où $\widehat{BAC} \approx 38{,}7°$.

98. Perpendiculaire ou pas ?

1. $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EF} = 0$

2. Le triangle est rectangle en E.

3. $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{EG}=4\neq 0$ donc les droites sont non perpendiculaires.

99. Dans un quadrilatère

1. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=BA\times BC\cos\widehat{ABC}=24\cos(69°)\approx 8{,}6$

2. $AC^2=AB^2+BC^2-2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=16+36-2\times 8{,}6$
$\approx 34{,}8$

donc $AC\approx 5{,}9$.

3. $\widehat{ACD}=\widehat{BAC}$ (angles alternes internes)

$\cos\widehat{BAC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\times AC}=\dfrac{16+34{,}8-36}{8\times 5{,}9}$

donc $\widehat{BAC}\approx 72°$.

100. Avec Al Kashi

1. $AC=\sqrt{12^2-6^2}=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$

2. $CC'=\sqrt{108+3^2}=\sqrt{117}$

101. Une configuration

1. $\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{AM}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})$
$=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}$
$=0-DA\times BM+AN\times AB+0=0$

donc les droites (DN) et (AM) sont perpendiculaires.

2. A(0 ; 0) D(0 ; 1) M(1 ; 1,5) et N(1,5 ; 0) d'où $\overrightarrow{DN}\begin{pmatrix}1{,}5\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}1\\1{,}5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{AM}=0$.

102. Dans un parallélogramme

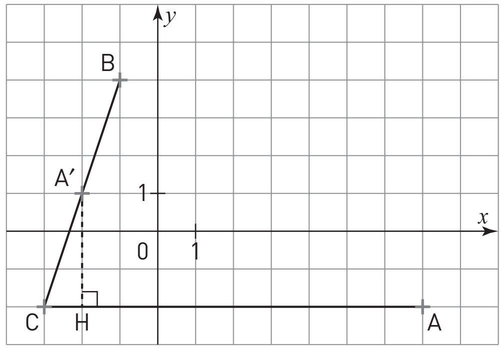
1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\dfrac{BA^2+BC^2-AC^2}{2}$
$=-\dfrac{64+16-36}{2}=-22$

2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\dfrac{BA^2+AD^2-BD^2}{2}=\dfrac{64+16-BD^2}{2}$

donc $BD^2=124$ et $BD=\sqrt{124}=2\sqrt{31}$.

103. De la perpendicularité

1.



2. $AB=\sqrt{8^2+6^2}=10=AC$

3. $A'(-2\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}-9\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-10\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AC}=90$.

4. $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=AH\times AC=10AH$ donc $AH=9$. On vérifie $H(-2\ ;\ -2)$.

5. $I\left(-2\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-9\\\dfrac{3}{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\-6\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BH}=0$.

104. Encore un angle droit

1. $(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC})$
$=\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

2. $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}^2-\overrightarrow{HA}^2-\overrightarrow{HA}^2+0=-HA^2$

3. $(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB})\cdot(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HC})$
$=\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$
$=HA^2+0+0-HB\times HC$

4. $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}=2\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{HI}$

5. De même $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HJ}$ d'où
$4\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{HJ}=HA^2-HB\times HC=0$.

105. De la rotation

1. Les angles sont supplémentaires.

2. Avec les angles supplémentaires et les longueurs égales on a bien l'égalité.

3. $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CF}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF})$
$=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$
$=0-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}+0=0$

106. Six carrés identiques

$\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ et $\cos\beta=\dfrac{5+2-1}{2\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ donc α et β sont égaux.

107. Perdu dans un carré

1. a) C(1 ; 1) D(0 ; 1) H(x ; 0) K(0 ; y)

$\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}-1\\ y-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix}x\\ -1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CK}\cdot\overrightarrow{DH} = -x - y + 1 = 0$

car M est sur la droite d'équation $y = -x + 1$.

b) $\overrightarrow{CK}\cdot\overrightarrow{DH} = (\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DK})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AH})$

$= \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{AH}$

$= 0 - AH \times CD + DK \times DA + 0$

$= -AH + DK = -x + 1 - y = 0$

2. a) $DH = \sqrt{x^2 + 1^2} = \sqrt{x^2+1}$ et

$CK = \sqrt{1^2 + (y-1)^2} = \sqrt{1 + x^2} = DH$.

b) $CK^2 = CD^2 + DK^2 = 1 + DK^2$ et $DH^2 = DA^2 + AH^2 = 1 + AH^2$ et comme DK = AH alors DH = CK.

Exercices d'approfondissement p. 240

108. Travail d'une force

a) $W = F \times AB \times \cos(0°) = F \times AB = 42\,000$ J

b) $W = F \times AB \times \cos(30°) = F \times AB \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 36\,373$ J

c) $W = F \times AB \times \cos(60°) = F \times AB \times \frac{1}{2} = 21\,000$ J

109. Point variable

1. $BP = c - d$, $DQ = d$ et $AQ = c - d$.

2. $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AQ} = -AQ \times DQ = -(c-d)d$ et

$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AP} = -BP \times AP = -(c-d)d$.

3. $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\cdot(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{QP} = 0$

110. Format commercial

1. $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}a\\ b/2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-a\\ b\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BD} = -a^2 + \frac{b^2}{2}$.

2. $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow -a^2 + \frac{b^2}{2} = 0 \Leftrightarrow b^2 = 2a^2 \Leftrightarrow b = a\sqrt{2}$

111. Dans un triangle rectangle

1. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$= 9 + 4 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos 80 = 13 - 12\cos(80°)$

donc $BC = \sqrt{13 - 12\cos(80°)}$.

2. $AI^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2$

$= \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})$

$= \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + AB^2 + AC^2 - BC^2)$

$= \frac{1}{4}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2)$

$= \frac{1}{4}(18 + 8 - 13 + 12\cos(80°))$

$= \frac{1}{4}(13 + 12\cos(80°))$

donc $AI \approx 1{,}94$.

3. Calculons d'abord l'angle en C :

$\cos\widehat{BCA} = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2CA \times CB} = \frac{4 + 13 - 12\cos(80°) - 9}{4\sqrt{13 - 12\cos(80°)}}$

qui donne $\widehat{BCA} \approx 63{,}4°$ et dans ACH on a

$AH = AC\sin(\widehat{BCA}) \approx 1{,}79$.

112. Triangle inscrit

1. $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CN} = CP \times CN \times \cos(60°) = \frac{d(a-d)}{2}$

2. $\overrightarrow{PN}\cdot\overrightarrow{PC} = (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CN})\cdot\overrightarrow{PC} = PC^2 - \overrightarrow{CP}$

$\overrightarrow{CN} = d^2 - \frac{d(a-d)}{2} = \frac{3}{2}d^2 - \frac{1}{2}ad$

3. CNP rectangle en P $\Leftrightarrow \overrightarrow{PN}\cdot\overrightarrow{PC} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}d^2 - \frac{1}{2}ad = 0 \Leftrightarrow a = 3d$.

4. $a = 4$ et $d = \frac{4}{3}$ alors

$PN^2 = CN^2 - CP^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{48}{9}$ d'où $PN = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

et par rotation on a MNP équilatéral.

113. Un ou deux ensembles de points ?

1. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = MI^2 - 1$ donc $MI^2 = 4$ et l'ensemble est le cercle de centre le point I milieu de [AB] et de rayon 2.

2. $$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2 \\ &= 2MI^2 + IA^2 + IB^2 \\ &= 2MI^2 + 2 \end{aligned}$$

3. $MA^2 + MB^2 = 10 \Leftrightarrow MI^2 = 4 \Leftrightarrow MI = 2$

4. On obtient le même ensemble.

Vers la Tle

114. 1. $$\begin{aligned} 1+\cos\widehat{A} &= 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ &= \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc} \\ &= \frac{2p2(p-a)}{2bc} = \frac{2p(p-a)}{bc} \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} 1-\cos\widehat{A} &= 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ &= \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc} \\ &= \frac{2(p-b)2(p-c)}{2bc} = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} (\sin\widehat{A})^2 &= 1-(\cos\widehat{A})^2 \\ &= (1+\cos\widehat{A})(1-\cos\widehat{A}) \\ &= \frac{2p(p-a)}{bc}\times\frac{2(p-b)(p-c)}{bc} \\ &= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}AC\times BH = \frac{1}{2}AC\times AB\times\sin\widehat{A} \\ &= \frac{1}{2}bc\times\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc} \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{\frac{51}{2}\times\frac{19}{2}\times\frac{17}{2}\times\frac{15}{2}} = 51\sqrt{5} \\ &\approx 114{,}04 \end{aligned}$$

et $$\begin{aligned} S_2 &= \sqrt{\frac{99}{2}\times\frac{61}{2}\times\frac{21}{2}\times\frac{17}{2}} \\ &= \frac{3}{4}\sqrt{239547} \approx 91{,}77. \end{aligned}$$

115. 1. D(0 ; 0) C(1 ; 0) A(0 ; 1) B(1 ; 1) E(0 ; –0,5) F(–0,5 ; –0,5) et G(–0,5 ; 0).

2. (BE) : $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ et (CF) : $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

3. $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \\ y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$ donne $H\left(\frac{1}{7} ; -\frac{2}{7}\right)$.

4. $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix} 1/7 \\ -2/7 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{CE} = 0$.

Travaux pratiques p. 241-243

TP 1. L'histoire du mètre

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir comment historiquement on est arrivé à la définition du mètre en pleine Révolution française.

A. Formule des sinus

1. $\sin\widehat{B} = \frac{AH}{AB}$ **2.** $\mathcal{A} = \frac{BC\times AH}{2}$

3. D'où $\mathcal{A} = \frac{1}{2}BC\times AB\times\sin\widehat{B}$.

4. De même on aurait :

$\mathcal{A} = \frac{1}{2}BC\times AC\times\sin\widehat{C}$ et $\mathcal{A} = \frac{1}{2}AC\times AB\times\sin\widehat{A}$

d'où le résultat.

B. Triangulation

Dans le triangle NDE on a alors

$\frac{ND}{\sin(\widehat{NED})} = \frac{NE}{\sin(\widehat{NDE})}$ ou $\frac{40}{\sin(0{,}61\times 0{,}9)} = \frac{NE}{\sin(120\times 0{,}9)}$

Donc $NE = \frac{40}{\sin(0{,}61\times 0{,}9)}\times\sin(120\times 0{,}9)$.

Dans le triangle NME on a aussi

$\frac{ME}{\sin(\widehat{NME})} = \frac{NE}{\sin(\widehat{NME})}$ ou $\frac{ME}{\sin(44\times 0{,}9)} = \frac{NE}{\sin(121\times 0{,}9)}$

donc $ME = \frac{NE}{\sin(121\times 0{,}9)}\times\sin(44\times 0{,}9)$,

soit environ une distance de 2 675 m.

TP 2. Médianes et centre de gravité d'un triangle

• **Durée estimée :** 15 min

• **Objectif :** Découvrir le centre de gravité d'un triangle et ses propriétés.

1. Dans le triangle BCD, A′ et G sont des milieux de deux côtés donc d'après la réciproque du théorème de Thalès (A′G) et (BD) sont parallèles. De même dans CAD on aura (B′G) et (AD) parallèles donc ADBG est un parallélogramme.

2. Donc les diagonales [GD] et [AB] se coupent en leur milieu.

3. Donc (CC′) médiane également puisque C′ est milieu de [AB].

4. D étant le symétrique de C par rapport à G alors $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ et C′ est milieu de [GD] donc $\overrightarrow{GC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GD}$.

5. $\overrightarrow{GC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$ et donc

$\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$ ou $\overrightarrow{CC'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CG}$.

6. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$

$= \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{GC}$

$= 2\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{GC}$

7. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{GC}$

$= 2\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

TP 3. Droite d'Euler

• **Durée estimée :** 10 min

• **Objectif :** Découvrir une droite particulière à partir des points remarquables d'un triangle.

1. a) Elles sont égales.

b) Donc O est aussi sur la médiatrice de [BC].

2. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}BC^2 + \frac{1}{2}BC^2 = 0$ et de même pour les autres produits scalaires.

3. On en déduit que (AM) et (BC) sont perpendiculaires, donc que M est sur la hauteur issue de A dans le triangle ABC. De même pour les autres hauteurs.

4. $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{OG} + \vec{0}$

TP 4. Lignes de niveau

• **Durée estimée :** 20 min

• **Objectif :** Découvrir la signification des lignes de niveau et aller un peu plus loin dans leur étude que le seul cas vu dans le programme.

(*Erratum : sur la toute première édition du manuel, la figure montre BA = 5, c'est une erreur corrigée sur les éditions suivantes, conformément à l'énoncé de la partie B : AB = 4.*)

A. 1. $f(A) = 0$, $f(B) = BA = 4$

$f(C) = CA = 3$, $f(D) = DA = 3\sqrt{2}$,

$f(E) = EA = \sqrt{2}$ et $f(F) = FA = 2$

2. Elle n'existe pas car une longueur ne peut pas être négative.

3. Ce n'est qu'un seul point : le point A.

4. On trace des cercles de centre A et de rayon k.

B. 1. $g(A) = AA + AB = 4$

$g(B) = BA + BB = 5$

$g(C) = CA + CB = 3 + 2 = 5$

$g(D) = DA + DB = 3\sqrt{2} + \sqrt{13}$

$g(E) = EA + EB = \sqrt{2} + \sqrt{17}$

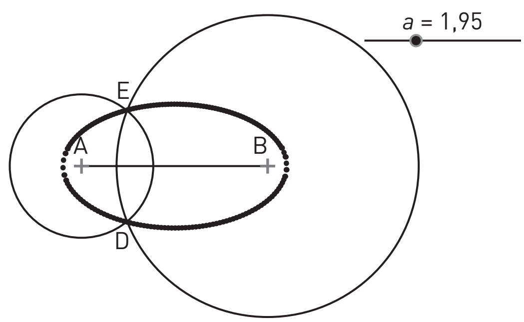
$g(F) = FA + FB = 2 + 7 = 9$

2. Une longueur ne peut être négative.

3. C'est impossible d'après l'inégalité triangulaire.

4. Ce sont tous les points du segment [AB].

5.



En autonomie p. 244-245

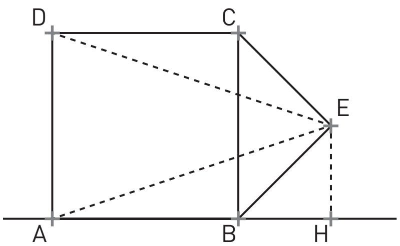
Calculer des produits scalaires

116. c **117. a** **118. b** **119. c**

120. 1. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$ donnent :

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 12 + 0 = 12$.

2. $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ donnent : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=-2+6=4$.



121. On projette le point E sur la droite (AB) en un point H.

1. a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=AB\times AH=4\times 6=24$

b) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}BC^2=8$

2. $\cos\widehat{BAE}=\frac{AH}{AE}=\frac{6}{\sqrt{40}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$ d'où : $\widehat{BAE}\approx 18{,}43°$.

Déterminer l'orthogonalité de vecteurs ou la perpendicularité de droites

122. a 123. b 124. b

125. 1. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{DC}$
$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}$

2. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DC}=4\times 5+0=20$

126. 1. A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(1 ; 1), D(0 ; 1), F(0,5 ; 0), E(1,5 ; 0,25)

2. $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1{,}5\\-0{,}75\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}-0{,}5\\-1\end{pmatrix}$ donnent :

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CF}=-0{,}75+0{,}75=0$.

127. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+0$
$=(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KC})\cdot\overrightarrow{AB}$
$=\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AB}+0$

Calculer des longueurs et des angles

128. a **129. b** **130. b** **131. b**

132. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ donnent :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-12+2=-10$, $AB=2\sqrt{5}$ et $AC=\sqrt{10}$.

Alors : $\cos\widehat{BAC}=\frac{-10}{2\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc : $\widehat{BAC}=135°$
.

133. 1. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ donnent :

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{NP}=-3+3=0$ donc $\widehat{MNP}=90°$.

2. Le triangle MNP est rectangle en N.

134. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ donnent :

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-5+4=-1$, $AC=\sqrt{17}$ et $BD=\sqrt{26}$.

Alors : $\cos(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}})=\frac{-1}{\sqrt{17}\times\sqrt{26}}$ et donc :

$(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}})\approx 92{,}73°$.

Déterminer des ensembles de points

135. c 136. d 137. b 138. c

139.

$\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MH}=MI^2-\frac{1}{4}GH^2$ où I est le milieu de [GH]. De plus : $GH=\sqrt{58}$ donc $MI^2=\frac{11}{2}+\frac{58}{4}=20$.

L'ensemble est le cercle de centre $I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $2\sqrt{5}$.

140. *(Erratum : sur la toute première édition du manuel, le produit scalaire* $\overrightarrow{MY}\cdot\overrightarrow{MN}=-25$*, sur les éditions suivantes* $\overrightarrow{MY}\cdot\overrightarrow{MN}=-5$.*)*

1. $\overrightarrow{MY}\cdot\overrightarrow{MN}=MI^2-\frac{1}{4}NY^2$ où I est le milieu de [NY].

De plus : $NY=\sqrt{26}$.

Donc $MI^2=-5+\frac{26}{4}=\frac{3}{2}$, qui est bien l'équation d'un cercle.

2. Le cercle de centre $I\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

141. 1. $\overrightarrow{VD}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{VK}\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$ donnent :

$\overrightarrow{VD}\cdot\overrightarrow{VK}=-8+10=2$ donc V appartient à l'ensemble.

2. $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MK}=MI^2-\frac{1}{4}DK^2$ où I est le milieu de [DK]. De plus : $DK=\sqrt{45}$ donc $MI^2=2+\frac{45}{4}=\frac{53}{4}$ et l'ensemble est le cercle de centre I et de rayon $\frac{\sqrt{53}}{2}$.

CHAPITRE 9 Géométrie repérée

Manuel p. 246-265

I. Introduction

Objectifs du chapitre

Le but de ce chapitre est de découvrir des applications du produit scalaire comme les équations de droites et de cercles.

Capacités

- → **Déterminer un vecteur normal à une droite.**
- → **Déterminer une équation cartésienne de droite avec un vecteur normal et un point.**
- → **Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite.**
- → **Utiliser une équation cartésienne d'un cercle.**
- → **Utiliser un repère pour étudier une configuration.**

II. Corrigés des activités et exercices

Pour prendre un bon départ p. 247

1. Déterminer des vecteurs directeurs à partir d'équations cartésiennes

Les vecteurs directeurs possibles sont **b)** et **d)**.

2. Déterminer des vecteurs directeurs à partir d'équations réduites

Les vecteurs directeurs possibles sont **b)**, **c)** et **d)**.

3. Déterminer des équations cartésiennes ou réduites

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ donc l'équation de la droite (AB) est de la forme $-x + 3y + c = 0$, puis $-x + 3y - 7 = 0$.

2. $-x_c + 3y_c - 7 = -5 + 12 - 7 = 0$, donc C appartient à (AB).

3. $m = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{4-3}{5-2} = \dfrac{1}{3}$ donc l'équation de la droite (AC) est de la forme $y = \dfrac{1}{3}x + p$ puis $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{7}{3}$.

4. L'équation de la droite est de la forme $4x - 5y + c = 0$, puis $4x - 5y + 6 = 0$.

5. L'équation de la droite est de la forme $y = 3x + p$, puis $y = 3x + 1$.

4. Déterminer si des droites sont parallèles ou non

a) Leurs vecteurs directeurs $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.

b) Les droites n'ont pas le même coefficient directeur donc elles ne sont pas parallèles.

c) Leurs vecteurs directeurs $\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.

d) Leurs vecteurs directeurs $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ sont colinéaires donc les droites sont parallèles.

5. Résoudre des systèmes d'équations

a) Par substitution :

$\begin{cases} x = -2y \\ 2(-2y) - 5y + 4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2y \\ -9y + 4 = 0 \end{cases}$ donc le couple solution est $\left(-\dfrac{8}{9} ; \dfrac{4}{9}\right)$.

b) Par combinaison : $\begin{cases} -6x+4y-2=0 \\ 6x-15y+21=0 \end{cases}$ donne

$-11y+19=0$ et $\begin{cases} -15x+10y-5=0 \\ 4x-10y+14=0 \end{cases}$ donne

$-11x+9=0$ donc le couple solution est $\left(\dfrac{9}{11};\dfrac{19}{11}\right)$.

c) Par substitution : $\begin{cases} y=-3x+2 \\ -7x+3(-3x+2)+1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=-3x+2 \\ -16x+7=0 \end{cases}$ donc le couple solution est

$\left(\dfrac{7}{16};\dfrac{11}{16}\right)$.

6. Trouver une forme canonique

a) $x^2+4x-1=(x+2)^2-5$

b) $x^2-6x+3=(x-3)^2-6$

c) $x^2+x+2=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$

d) $x^2+3x-1=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{13}{4}$

Activités

p. 248-249

Activité 1. Déterminer des vecteurs normaux

• **Durée estimée :** 15 min

• **Objectif :** Découvrir, à partir d'une équation cartésienne de droite et d'un vecteur directeur, la notion de vecteur normal.

A. Un exemple

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

2. À l'aide du produit scalaire, on peut déterminer un vecteur orthogonal, qui peut être $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

3. $3c+2d=0$

4. a) $(2\ ;-3)$, $(6\ ;-9)$, $(-4\ ;6)$

b) c) Ils sont colinéaires.

B. Généralité

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

2. $-bc+ad=0$

3. $(a\ ;b)$

Activité 2. Utiliser des droites particulières dans un triangles

• **Durée estimée :** 20 min

• **Objectif :** Déterminer des équations cartésiennes de droites particulières dans un triangle.

A. Détermination de l'équation d'une hauteur

1. La hauteur passe par A et est perpendiculaire à (BC).

2. Un vecteur normal est $\overrightarrow{BC}$.

3. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ donc une équation cartésienne de la hauteur issue de A est de la forme $2x-4y+c=0$.

4. Elle passe par $2\times3-4\times1+c=0$ donc $c=-2$

B. Détermination de l'équation d'une médiatrice

1. La médiatrice passe par le milieu de [BC] et est perpendiculaire à (BC).

2. Un vecteur normal est $\overrightarrow{BC}$

3. Voir **A.3.**

4. Le milieu de [BC] est $(-2\ ;2)$ donc on a $2\times(-2)-4\times2+c=0$ donc $c=12$.

5. Elles sont parallèles car elles ont le même vecteur normal.

Activité 3. Découvrir les équations de cercles

• **Durée estimée :** 20 min

• **Objectif :** Après les équations de droites, découvrir les équations de cercles.

1. $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}3-x\\2-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-2-x\\1-y\end{pmatrix}$.

2. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(3-x)(-2-x)+(2-y)(1-y)$

3. En développant : $x^2-x+y^2-3y-4=0$.

4. On développe.

5. $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

6. $MI = \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2}$.

7. L'ensemble cherché est donc le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{13}{2}}$.

Activité 4. Comprendre la différence entre fonction et équation de courbe

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Comprendre la distinction entre une fonction et une équation ou encore entre une fonction et l'équation de sa représentation graphique.

A. Introduction

1. En rouge la fonction inverse, en vert la fonction carrée, en bleu la fonction cube et en orange la fonction racine carrée.

2. Les points de chaque courbe ont pour coordonnées $(x\ ;\ f(x))$.

3. Donc les équations s'écrivent de la forme $y = f(x)$.

B. Premier exemple : $ax + by + c = 0$

1. Une droite.

2. Non pas pour les droites verticales.

3. Selon que $b = 0$ ou pas.

C. Second exemple : $x^2 + y^2 = 25$

1. $(-5\ ;\ 0)$ $(-4\ ;\ -3)$ $(-3\ ;\ -4)$ $(0\ ;\ 5)$ $(3\ ;\ 4)$ $(4\ ;\ 3)$ $(-4\ ;\ 3)$ $(-3\ ;\ 4)$ $(4 ;-3)$ $(3 ;-4)$ $(5\ ;\ 0)$ $(0 ;-5)$.

2. Non car par exemple deux points ont la même abscisse 3.

3. $y = \sqrt{25 - x^2}$ ou $y = -\sqrt{25 - x^2}$.

4. On obtient donc deux fonctions racines.

À vous de jouer ! p. 251-253

1. a) Un vecteur normal est : $\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$.

b) Un vecteur normal est : $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

c) Un vecteur normal est : $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

2. a) $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-7\\-3\end{pmatrix}$ un vecteur normal est $\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\-6\end{pmatrix}$ un vecteur normal est $\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$.

3. De la forme : $x + 3y + c = 0$ et passe par K donc : $x + 3y - 6 = 0$.

4. L'équation de la droite est de la forme $x - 3y + c = 0$ et alors $3 - 3 \times (-2) + c = 0$ donne $c = -9$.

5. Un vecteur normal à la droite est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ donc la perpendiculaire a une équation de la forme : $-x - 2y + c = 0$ elle passe par B donc : $-x - 2y - 5 = 0$

et le projeté vérifie le système : $\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ x + 2y + 5 = 0 \end{cases}$

qui par substitution donne : $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ x + 2(2x + 4) + 5 = 0 \end{cases}$

soit : $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ 5x + 13 = 0 \end{cases}$ donc : $\left(-\frac{13}{5}\ ;-\frac{6}{5}\right)$.

6. Perpendiculaire : $-x + 3y + 7 = 0$.

$\begin{cases} -3x - y + 5 = 0 \\ -x + 3y + 7 = 0 \end{cases}$ donne $\left(\frac{11}{5}\ ;-\frac{8}{5}\right)$.

7. Perpendiculaire : $3x - 4y - 6 = 0$.

$\begin{cases} 3x - 4y - 6 = 0 \\ 4x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$ donne $\left(\frac{26}{25}\ ;-\frac{18}{25}\right)$.

8. Perpendiculaire : $-5x + y - 5 = 0$.

$\begin{cases} -5x + y - 5 = 0 \\ -x - 5y + 7 = 0 \end{cases}$ donne $\left(-\frac{9}{13}\ ;\frac{20}{13}\right)$.

9. Perpendiculaire : $3x + y - 5 = 0$.

$\begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$ donne $\left(\frac{7}{5}\ ;\frac{4}{5}\right)$.

10. Perpendiculaire : $-x + y = 0$.

$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -x - y + 4 = 0 \end{cases}$ donne $(2\ ;\ 2)$.

11. Perpendiculaire : $3x+2y=0$.

$\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 2x-3y+15=0 \end{cases}$ donne $\left(-\frac{30}{13}\,;\frac{45}{13}\right)$.

12. Perpendiculaire : $4x-3y-21=0$.

$\begin{cases} 4x-3y-21=0 \\ 3x+4y+2=0 \end{cases}$ donne $\left(\frac{78}{25}\,;-\frac{71}{25}\right)$.

13. Perpendiculaire : $3x-y+13=0$.

$\begin{cases} 3x-y+13=0 \\ x+3y-2=0 \end{cases}$ donne $\left(-\frac{37}{10}\,;\frac{19}{10}\right)$.

14. x^2-3x+y^2+5y-1

$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}-1$

$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{19}{2}$

Ce qui donne l'équation :

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{19}{2}$ qui est une équation du cercle de centre $\left(\frac{3}{2}\,;-\frac{5}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{38}}{2}$.

15. $\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+y^2+2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{7}{2}\right)^2+y^2=\frac{41}{4}$: cercle de centre $\left(-\frac{7}{2}\,;0\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{41}}{2}$.

16. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2}{4}$: cercle de centre $\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

17. $(x+2)^2-4+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+11=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}$ qui est un ensemble vide.

18. $x^2+(y-3)^2-9+12=0 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=-3$ qui est un ensemble vide.

19. $(x-1)^2-1+(y+3)^2-9+10=0$
$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=0$ qui est le point $(1\,;-3)$.

20. $(x+1)^2-1+(y-4)^2-16=17$
$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-4)^2=34$: cercle de centre $(-1\,;4)$ et de rayon $\sqrt{34}$.

21. $(x-2)^2-4+(y-2)^2-4=8 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=16$: cercle de centre $(2\,;2)$ et de rayon 4.

22. $(x+3)^2-9+y^2+9=0 \Leftrightarrow (x+3)^2+y^2=0$ qui est le point$(-3\,;0)$.

Exercices d'application p. 254-256

Apprendre à apprendre

23. a) $y=-2x^2+3x-4$ donc il s'agit d'une parabole.

b) $y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$ donc il s'agit d'une droite.

c) $(x-0{,}5)^2+(y+2)^2=4{,}25$ donc il s'agit d'un cercle.

d) $y=\frac{3}{x}$ donc il s'agit d'une hyperbole.

e) $x^2+y^2=1$ donc il s'agit d'un cercle.

f) Ce n'est pas un cercle à cause du signe moins.

24. On associe :

Droite	Vecteur directeur	Vecteur normal
1	b	a
2	d	c
3	a	b
4	c	d

Questions-Flash

25. Un vecteur normal est : $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$.

26. Un vecteur normal est : $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

27. Un vecteur normal est : $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

28. Un vecteur orthogonal au vecteur $\vec{u}$ est : $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

29. Un vecteur orthogonal au vecteur $\vec{u}$ est : $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

30. Un vecteur orthogonal au vecteur $\vec{u}$ est : $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

31. Un vecteur directeur de la perpendiculaire est : $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

32. Un vecteur directeur de la perpendiculaire est : $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

33. Un vecteur directeur de la perpendiculaire est : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

34. Le centre est $(1\ ;-4)$ et le rayon est $\sqrt{6}$.

35. Le centre est $(-1\ ;-5)$ et le rayon est 3.

36. $x^2 - 4x + y^2 - 3y = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4} = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$ qui est une équation du cercle de centre $\left(2\ ;\dfrac{3}{2}\right)$ et le rayon est $\dfrac{5}{2}$.

Déterminer un vecteur normal à une droite

37. a) Un vecteur normal est : $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Un vecteur normal est : $\vec{n}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

c) Un vecteur normal est : $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

d) Un vecteur normal est : $\vec{n}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

38. a) $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{n}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

39. a) $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

40. $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

41. a) $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{n}\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{n}\begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}$

42. a) $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$

c) $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{n}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

43. a) $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Déterminer une équation cartésienne de droite avec un vecteur normal et un point

44. a) De la forme : $x - 3y + c = 0$ et passe par B donc : $x - 3y - 1 = 0$.

b) De la forme : $4x - 2y + c = 0$ et passe par B donc : $4x + 2y - 14 = 0$.

c) De la forme : $3x - y + c = 0$ et passe par B donc : $-3x - y - 7 = 0$.

d) De la forme : $5x + 3y + c = 0$ et passe par B donc : $5x + 3y - 15 = 0$.

45. a) De la forme $2x + 3y + c = 0$ et

$2 \times \left(-\dfrac{2}{3}\right) + 3 \times \dfrac{1}{3} + c = 0$ donc : $2x + 3y + \dfrac{1}{3} = 0$.

b) De la forme $-5x+y+=0$ et $-5\times\left(\dfrac{3}{2}\right)+(-4)+c=0$ donc : $-5x+y+\dfrac{23}{2}=0$.

c) De la forme $3x-2y+c=0$ et $3\times(-\sqrt{3})-2\times(-1)+c=0$ donc :
$3x-2y+3\sqrt{3}-2=0$.

46. De la forme $2x+c=0$ et $2+c=0$ donc :
$2x-2=0$ ou $x=1$.

47. De la forme $-2x+4y+c$ et $-2\times(-1)+4+c$ donc :$-2x+4y-6=0$.

48. 1. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

2. De la forme $2x+5y+c=0$ et
$2\times(-3)+5\times(-7)+c=0$ donc : $2x+5y+41=0$.

49. 1. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ **2.** $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

3. De la forme $3x+y+c=0$ donc $3x+y=0$.

50. 1. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ **2.** $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

3. De la forme $-x+4y+c=0$ et $-1+4+c=0$ donc : $-x+4y-3=0$.

4. $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}$

51. 1. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ **2.** $\vec{n}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$

3. De la forme $3x+5y+c=0$ et $6-10+c=0$ donc : $3x+5y+4=0$.

4. $y=-\dfrac{3}{5}x-\dfrac{4}{5}$.

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

52. 1. $6x_A+5y_A-2=-6-10-2\neq 0$ donc A n'appartient pas à *d*.

2. Un vecteur normal est : $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$.

3. La perpendiculaire à *d* est de la forme : $5x-6y+c=0$, elle passe par A donc :
$5x-6y-7=0$.

4. Les coordonnées de H vérifient : $\begin{cases}6x+5y-2=0\\5x-6y-7=0\end{cases}$

Par combinaison on obtient : $\begin{cases}30x+25y-10=0\\-30x+36y+42=0\end{cases}$

qui donne $61y+32=0$ et $\begin{cases}36x+30y-12=0\\25x-30y-35=0\end{cases}$ qui donne $61x-47=0$.

Donc $H\left(\dfrac{47}{61};-\dfrac{32}{61}\right)$.

53. 1. $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

2. De la forme $x-3y+c=0$ et $2+9+c=0$ donc : $x-3y-11=0$.

3. $\begin{cases}3x+y-4=0\\x-3y-11=0\end{cases}$ donne $\left(\dfrac{23}{10};-\dfrac{29}{10}\right)$.

54. 1. $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

2. De la forme $3x+2y+c=0$ et $-12+2+c=0$ donc : $3x+2y+10=0$.

3. $\begin{cases}3x+2y+10=0\\-2x+3y+3=0\end{cases}$ donne $\left(-\dfrac{24}{13};-\dfrac{29}{13}\right)$.

55. 1. $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$.

2. De la forme $x+3y+c=0$ et $-2+3+c=0$ donc : $x+3y-1=0$.

3. $\begin{cases}x+3y-1=0\\3x-y-1=0\end{cases}$ donne $\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{5}\right)$.

56. 1. $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$.

2. De la forme $-4x - 5y + c = 0$ et $8 + 15 + c = 0$ donc : $-4x - 5y - 23 = 0$.

3. $\begin{cases}4x + 5y + 23 = 0\\ 5x - 4y + 1 = 0\end{cases}$ donne $\left(-\frac{97}{41} ; -\frac{111}{41}\right)$.

57. 1. $\vec{n}\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$.

2. De la forme $-3x - 7y + c = 0$ et $-27 - 14 + c = 0$ donc : $-3x - 7y + 41 = 0$.

3. $\begin{cases}-3x - 7y + 41 = 0\\ 7x - 3y + 1 = 0\end{cases}$ donne D(2 ; 5).

4. N(2 ;2)

5. Car DNG est rectangle en N.

Déterminer une équation cartésienne d'un cercle

58. Une équation cartésienne est :

$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$.

59. $(x - 2)^2 + y^2 = 3$

60. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$

61. $(x - 5)^2 + y^2 = 49$

62. $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 12$

63. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25}{4}$

64. 1. $G\left(-\frac{1}{2} ; 3\right)$

2. $AG = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{41}}{2}$

3. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 = \frac{41}{4}$

65. a) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$

b) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$

c) $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}$

d) $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$

66. a) Centre H et rayon 2.

b) Centre G et rayon $\sqrt{6}$.

c) Centre E et rayon 1.

d) Centre F et rayon $\sqrt{5}$.

Reconnaître une équation cartésienne d'un cercle

67. $x^2 - 4x + y^2 - 3y = 2$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 - 4 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 2$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{33}{4}$:

cercle de centre $\left(2 ; \frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{33}}{2}$.

68. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{18}{4}$: cercle de centre $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

69. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + y^2 + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = -\frac{3}{4}$ donc l'ensemble vide.

70. $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{58}{4}$: cercle de centre $\left(-\frac{5}{2} ; \frac{5}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{58}}{2}$.

71. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y+3\right)^2-9+1=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+3\right)^2=\frac{33}{4}$: cercle de centre $\left(-\frac{1}{2};-3\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{33}}{2}$.

72. a) $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\left(y-2\right)^2-4=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{25}{4}$: cercle de centre $\left(-\frac{3}{2};2\right)$ et de rayon $\frac{5}{2}$.

b) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+1=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{6}{4}$: cercle de centre $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

c) $(x+4)^2-16+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+16=0$

$\Leftrightarrow (x+4)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$: cercle de centre $\left(-4;-\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{3}{2}$.

d) $(x+3)^2-9+(y-2)^2-4+14=0$

$\Leftrightarrow (x+3)^2+(y-2)^2=-1$ donc l'ensemble est vide.

73. 1. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{18}{4}$: il s'agit bien d'un cercle.

2. Centre $\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ et rayon $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

3. $1^2-3+(-2)^2-2-2\neq 0$ donc G n'appartient pas au cercle.

$\left(0-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}\neq\frac{18}{4}$ donc N non plus.

74. 1. $x^2+(y-3)^2-9=0 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=9$: il s'agit bien d'un cercle.

2. Centre (0 ; 3) et rayon 3.

3. $2^2+1^2-6=-1\neq 0$ donc V n'appartient pas au cercle.

$(-3)^2+(3-3)^2=9$ donc D appartient au cercle.

Calculs et automatismes

75. a) x^2-6x+9 **b)** x^2+4x+4

c) $x^2-3x+\frac{9}{4}$ **d)** $x^2+5x+\frac{25}{4}$

76. a) $3\sqrt{2}$ **b)** $2\sqrt{3}$ **c)** $6\sqrt{2}$ **d)** $5\sqrt{2}$

Exercices d'entraînement p. 257-258

Des droites perpendiculaires et des projetés orthogonaux

77. a) $3x+y-11=0$

b) $3x+2y+11=0$

c) $3x-5y-10=0$

d) $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

78. 1. $3x+5y-11=0$

2. $\begin{cases}-5x+3y-1=0\\3x+5y-11=0\end{cases}$ donne $\left(\frac{14}{17};\frac{29}{17}\right)$.

79. 1. $2x+7y-10=0$

2. Perpendiculaire : $7x-2y-13=0$.

$\begin{cases}7x-2y+13=0\\2x+7y-10=0\end{cases}$ donne $\left(-\frac{71}{53};\frac{96}{53}\right)$.

80. 1. $-3x+y-7=0$

2. Perpendiculaire $x+3y-11=0$.

$\begin{cases}-3x+y-7=0\\x+3y-11=0\end{cases}$ donne (–1 ; 4).

81. 1. I(1 ;3) **2.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

3. $4x+2y-10=0$

82. 1. a) $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = a_1a_2 + b_1b_2$

2. a) $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} -b_1 \\ a_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} -b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = a_1a_2 + b_1b_2$

3. $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}$

4.

```
d=a1a2+b1b2
if d=0:
```

83. 1. I(0 ; – 1) et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc la médiatrice est $-x + y + 1 = 0$.

2. – 3 + 2 – 1 = 0 donc P appartient à la droite.

3. MNP est isocèle en P.

4. c'est le point I.

84. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc la hauteur issue de A a pour équation : $3x + y + 5 = 0$ et la droite (BC) : $x + 3y + 6 = 0$.

Le projeté de A est solution de $\begin{cases} -3x + y + 5 = 0 \\ x + 3y + 6 = 0 \end{cases}$

donc $\left(\frac{9}{10} ; -\frac{23}{10}\right)$.

Distances et longueurs

85. 1. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$

2. $x - y - 4 = 0$

3. $\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$ donc H(3 ; – 1).

4. $AH = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

5. $\frac{1}{2}BC \times AH = \frac{1}{2}6\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 12$

86. 1. $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ milieu de [EF] $\left(\frac{1}{2} ; -2\right)$,

Médiatrice $x = \frac{1}{2}$.

2. Non.

3. Hauteur $x = 1$.

4. K(1 ; – 2)

5. $\frac{1}{2}EF \times GK = \frac{1}{2}5 \times 4 = 10$

87. 1. $\begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ 3x + y - 14 = 0 \end{cases}$ donc $\left(\frac{19}{5} ; \frac{13}{5}\right)$.

2. Distance de A à $d = \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{18}{5}\right)^2} = \frac{6\sqrt{10}}{5} \approx 3{,}79$.

3. $\begin{cases} 2x - 3y - 13 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$ donc $\left(\frac{29}{13} ; -\frac{37}{13}\right)$.

4. Distance de A à

$d' = \sqrt{\left(\frac{36}{13}\right)^2 + \left(\frac{24}{13}\right)^2} = \frac{12\sqrt{13}}{13} \approx 3{,}33$.

5. Donc plus proche de d'.

Des cercles

88. Le cercle de centre C et de rayon 2.

89. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{73}{4}$.

90. 1. $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 < 4 + 3$ donc cercles sécants.

2. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ et $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 16$

3. AC = 3 et BC = 4 donc C appartient aux deux cercles.

4. ABC est rectangle en C.

91. 1. $(x + 1)^2 - 1 + (y - 1)^2 - 1 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ et $(x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$

2. Le premier de centre C_1(– 1 ; 1) et de rayon 2 et le second de centre C_2(– 3 ; – 2) et de rayon 3.

3. $C_1C_2 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

4. Ils sont tangents extérieurement car 2 + 3 = 5.

92. 1. $(x-4)^2-16+(y-3)^2-9=0$

$\Leftrightarrow (x-4)^2+(y-3)^2=25$

et $(x-3)^2-9+(y-4)^2-16+16=0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=9.$

2. Le premier de centre $C_1(4\ ;\ 3)$ et de rayon 5 et le second de centre $C_2(3\ ;\ 4)$ et de rayon 3.

3. $C_1C_2=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$

4. Le deuxième cercle est à l'intérieur du premier car $5>3+\sqrt{2}.$

93. 1. On divise tout par 2.

2. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\left(y+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+2=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{13}{16}$ donc de centre $\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{4}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{13}}{4}.$

94. On divise tout par 3 :

$x^2-2x+y^2+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{13}{9}$

donc de centre $\left(1;-\frac{1}{3}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{13}}{3}.$

Avec des paramètres

95. 1. $(x-a)^2-a^2+(y+2)^2-4+8=0$

$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y+2)^2=a^2-4$

2. C'est l'équation d'un cercle si $a^2-4>0$ donc pour $a\in\,]-\infty\ ;-2[\cup]2\ ;+\infty[.$

3. Centre $(a\ ;-2)$ et rayon $\sqrt{a^2-4}.$

96. $(x+a)^2-a^2+(y-1)^2-1+5=0$

$\Leftrightarrow (x+a)^2+(y-1)^2=a^2-4$

2. Cercle si $a^2-4>0$ donc pour $a\in\,]-\infty\ ;-2\,[\cup]2\ ;+\infty[.$

3. Centre $(-a\ ;\ 1)$ et rayon $\sqrt{a^2-4}.$

97. Cet algorithme vérifie si l'équation est celle d'un cercle ou non.

Des intersections

98. a) $\begin{cases} x^2-3x+y^2+y-16=0 \\ y=-4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+16-4-16=0 \\ y=-4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-4=0 \\ y=-4 \end{cases}$ donc les points sont $(-1\ ;-4)$ et $(4\ ;-4)$.

b) $\begin{cases} (x-2)^2+(y-3)^2=18 \\ x=-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9+(y-3)^2=18 \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-3)^2=9 \\ x=-1 \end{cases}$ donc les points sont $(-1\ ;\ 0)$ et $(-1\ ;\ 6)$.

c) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+9=4 \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=-5 \\ y=3 \end{cases}$

donc pas de solution.

99. 1. $\begin{cases} x^2-3x+y^2+y\mp 1=0 \\ x=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-3+y^2+y+1=0 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+y=1=0 \\ x=1 \end{cases}$

donc les points sont $\left(1;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ et $\left(1;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right).$

2. $\begin{cases} x^2-3x+y^2+y\mp 1=0 \\ y=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+1+1+1=0 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+3=0 \\ y=1 \end{cases}$

donc pas de solution.

3. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=0$

$\Leftrightarrow \left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{4}$

4. Centre $\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ et rayon $\frac{\sqrt{6}}{2}.$

100. 1. On remplace x et par 0 et on obtient bien 0 donc l'ensemble passe par l'origine.

2. $\begin{cases} x^2+3x+y^2-4y=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x=0 \\ y=0 \end{cases}$

donc les points sont (0 ; 0) et (−3 ; 0).

$\begin{cases} x^2+3x+y^2-4y=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-4y=0 \\ x=0 \end{cases}$

donc les points sont (0 ; 0) et (0 ; 4).

3. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+(y-2)^2-4=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{25}{4}$.

4. Centre $\left(-\frac{3}{2};2\right)$ et rayon $\frac{5}{2}$.

Travailler autrement

101. Une construction sur GeoGebra montre que ce n'est pas le cas et que le cercle aurait pour équation $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ ce qui ne correspond pas à l'équation donnée même en l'élevant au carré.

102. Pas à pas on obtient pour 1 point – 1 région, pour 2 points – 2 régions, pour 3 points – 4 régions, pour 4 points – 8 régions, pour 5 points – 16 régions, mais pour 6 points – 31 régions, pour 7 points – 57 régions ... ! À partir de là on peut chercher une solution par dénombrement (voir programme de Spécialité Terminale) ou par méthode des différences finies c'est-à-dire qu'on étudie les différences successives entre les résultats trouvés jusqu'à obtenir une suite remarquable et ensuite on remonte dans le sens inverse.

Exercices bilan p. 259

103. Coordonnées, équations et aire

1. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$

2. $5x-2y-6=0$.

3. $\begin{cases} 5x-2y-6=0 \\ -2x-5y+1=0 \end{cases}$ donc $H\left(\frac{32}{29};-\frac{7}{29}\right)$.

4. Milieu de [AC] : $\left(\frac{1}{2};0\right)$ donc $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{29}{4}$.

5. $\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+(-3)^2=\frac{1}{4}+9\neq\frac{29}{4}$ donc B n'est pas sur le cercle.

6. $BH=\sqrt{\left(\frac{32}{29}\right)^2+\left(3-\frac{7}{29}\right)^2}=\frac{16\sqrt{29}}{29}$

Aire $=\frac{1}{2}AC\times BH=\frac{1}{2}\sqrt{29}\times\frac{16\sqrt{29}}{29}=8$

104. Distance d'un point à une droite

1. $\begin{cases} 2x-5y-1=0 \\ 5x+2y-19=0 \end{cases}$ donc $\left(\frac{97}{29};\frac{33}{29}\right)$.

2. $\begin{cases} y=-3x+2 \\ y=\frac{1}{3}x-\frac{14}{3} \end{cases}$ donc(2 ; −4).

3. Distance de A à d

$=\sqrt{\left(5-\frac{97}{29}\right)^2+\left(\frac{33}{29}+3\right)^2}=\frac{24\sqrt{29}}{29}\approx 2{,}11$.

Distance de A à $d'=\sqrt{(3)^2+(1)^2}=\sqrt{10}\approx 3{,}16$ donc A est plus proche de d.

105. Cercle circonscrit

1. Milieu de [AB] (3 ; 4) et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ donc

$-2x+4y-10=0$.

2. Milieu de [AC] (1 ; 2) et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$ donc $-6x+6=0$ ou $x=1$.

3. $\begin{cases} -2x+4y-10=0 \\ x=1 \end{cases}$ donc O(1 ; 3).

4. $OA=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

5. $(x-1)^2+(y-3)^2=10$

6. On remplace par les coordonnées des points B et C et on vérifie bien l'égalité donc ils appartiennent au cercle.

106. Bissectrice

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ orthogonaux.

2. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{17}{3} \end{cases}$ donc $\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{11}{2}\right)$ et $\begin{cases} x + 3y - 2 = 0 \\ 3x - y - 11 = 0 \end{cases}$

donc $\left(\dfrac{7}{2} ; -\dfrac{1}{2}\right)$.

3. Distance de B à $d = \sqrt{\left(\dfrac{9}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

Distance de B à $d' = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{9}{2}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

4. $\begin{cases} x + 3y - 2 = 0 \\ 3x - y + 4 = 0 \end{cases}$ donc A(– 1 ; 1).

5. $x - 2y + 3 = 0$.

107. Cercle ou non

a) $(x - 1)^2 - 1 + (y + 3)^2 - 9 - a = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = a + 10$ est un cercle si $a > -10$.

b) $(x - a)^2 - a^2 + (y + 2)^2 - 4 = 20$

$\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y + 2)^2 = a^2 + 24$ est un cercle de rayon 7 si $a^2 + 24 = 49$ donc pour $a = 5$ ou $a = -5$.

108. Tangente à un cercle

1. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$

2. $(2 - 2)^2 + (3 - 1)^2 = 4$

3. $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

4. $2y - 6 = 0$ ou $y = 3$.

109. Cercles tangents intérieurement

1. $(x + 3)^2 - 9 + y^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + y^2 = 18$ donc cercle de centre A(– 3 ; 0) et de rayon $3\sqrt{2}$.

2. $\begin{cases} x^2 + 6x + y^2 - 9 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ donc E(0 ; 3).

3. CE + $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

4. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc alignés.

5. AC + CE = AE il n'y a donc qu'un seul point d'intersection car les cercles sont tangents intérieurement.

110. Cercles concentriques

1. $\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$ donc H(– 1 ; 1).

2. $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ (x + 2)^2 + (2x + 4)^2 = 10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ 5x^2 + 20x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ x^2 + 4x + 2 = 0 \end{cases}$

donc $A(-2 + \sqrt{2} ; -1 + 2\sqrt{2})$ et $T(-2 - \sqrt{2} ; -1 - 2\sqrt{2})$.

$AH = \sqrt{(-1 + \sqrt{2})^2 + (-2 + 2\sqrt{2})^2} = \sqrt{15 - 10\sqrt{2}}$ et

$TH = \sqrt{(-1 - \sqrt{2})^2 + (-2 - 2\sqrt{2})^2} = \sqrt{15 + 10\sqrt{2}}$.

3. $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$

4. On remplace par les coordonnées de l'origine et on obtient bien 5 donc elle appartient au cercle.

111. Avec des tangentes

1. $\mathscr{C}_1 : x^2 + (y + 3)^2 = 45$ et $\mathscr{C}_2 : (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 20$.

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ donc $-x + 2y - 9 = 0$.

3. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $2x + y - 14 = 0$.

4. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

5.Les droite (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercices d'approfondissement

p. 260-261

112. Cercles et axes

$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 12 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)^2 = 8 \\ y = 0 \end{cases}$ donc les points sont $(1 + 2\sqrt{2} ; 0)$ et $(1 - 2\sqrt{2} ; 0)$.

$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 12 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - 2)^2 = 11 \\ x = 0 \end{cases}$ donc les points sont $(0; 2 + \sqrt{11})$ et $(0 ; 2 - \sqrt{11})$.

113. Cercle et droite

$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 37 \\ y = -x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2+(-x-2)^2=37 \\ y=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-12=0 \\ y=-x \end{cases}$ donc les points sont $(-3\ ;\ 3)$ et $(4\ ;\ -4)$.

114. Un diamètre

1. $\begin{cases} (x+2)^2+(y-1)^2=18 \\ x+y+1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2+(-x-2)^2=18 \\ x+y+1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x-5=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$ donc les points sont $E(1\ ;\ -2)$ et $F(-5\ ;\ 4)$.

2. $EF=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}=2\times 3\sqrt{2}$ donc [EF] est un diamètre.

115. Tangente

1. $\begin{cases} (x+3)^2+(y+2)^2=32 \\ y=x+9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2+(x+11)^2=32 \\ y=x+9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+14x+49=0 \\ y=x+9 \end{cases}$ donc le point est $K(-7\ ;\ 2)$.

2. $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur et $\overrightarrow{CK}\cdot\vec{u}=0$ donc ils sont bien perpendiculaires.

116. Une ligne de niveau

1. $MA^2+MB^2=(x-4)^2+(y+1)^2+(x-3)^2+(y-2)^2=2x^2-14x+2y^2-2y+30$

2. $MA^2+MB^2=54 \Leftrightarrow x^2-7x+y^2-y=24$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=24$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{73}{2}$ qui est l'équation d'un cercle.

3. Centre $\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$ et rayon $\frac{\sqrt{146}}{2}$.

117. La droite d'Euler

1. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'où $4x+y-13=0$.

2. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ d'où $x-y-1=0$.

3. $\begin{cases} 4x+y-13=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$ donc $H\left(\frac{14}{5};\frac{9}{5}\right)$.

4. $\begin{cases} 2-x-1-x+7-x=0 \\ 5-y-2-y-y=0 \end{cases}$ donc $G\left(\frac{8}{3};1\right)$.

5. Milieu de [BC] : $(3\ ;\ -1)$ donc la médiatrice a pour équation : $4x+y-11=0$.

6. Milieu de [AC] : $\left(\frac{9}{2};\frac{5}{2}\right)$ donc la médiatrice a pour équation : $x-y-2=0$.

7. $\begin{cases} 4x+y-11=0 \\ x-y-2=0 \end{cases}$ donc $O\left(\frac{13}{5};\frac{3}{5}\right)$.

8. $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

118. Famille de cercles

1. $(x+1)^2-1+(y-5)^2-25+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-5)^2=25$: centre $(-1\ ;\ 5)$ et rayon 5.

$(x-4)^2-16+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+16=0$

$\Leftrightarrow (x-4)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$: centre $\left(4;\frac{5}{2}\right)$ et rayon $\frac{5}{2}$.

2. $\begin{cases} (x+1)^2+(y-5)^2=25 \\ y=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2=0 \\ y=0 \end{cases}$ donc un seul point : $(-1\ ;\ 0)$.

$\begin{cases} (x-4)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4} \\ y=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2=0 \\ y=0 \end{cases}$ donc un seul point : $(4\ ;\ 0)$.

3. $\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 - 10y + 1 = 0 \\ x^2 - 8x + y^2 - 5y + 16 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + y^2 - 10y + 1 = 0 \\ 10x - 5y - 15 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + y^2 - 10y + 1 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + (2x-3)^2 - 10(2x-3) + 1 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 30x + 40 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 8 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$ donc A(4 ; 5) et B(2 ; 1).

4. Milieu de [AB] : (3 ; 3) et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc la médiatrice est $x + 2y - 9 = 0$.

5. $\mathrm{CB}^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2$

$$= (a-2)^2 + \left(\frac{-a+9}{2} - 1\right)^2$$

$$= (a-2)^2 + \left(\frac{-a+7}{2}\right)^2$$

$$= \frac{5}{4}a^2 - \frac{15}{2}a + \frac{65}{4} = \frac{5}{4}(a^2 - 6a + 13)$$

donc le rayon de ces cercles est $\sqrt{\frac{5}{4}(a^2 - 6a + 13)}$.

6. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{5}{4}(a^2 - 6a + 13)$

$\Leftrightarrow (x-a)^2 + \left(y - \frac{-a+9}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}(a^2 - 6a + 13)$

7. $\begin{cases} (x-a)^2 + \left(\frac{-a+9}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}(a^2 - 6a + 13) \\ y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2 + \left(y - \frac{-a+9}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}(a^2 - 6a + 13 \\ y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2 = a^2 - 3a - 4 \\ y = 0 \end{cases}$ cette première équation a des solutions quand $a^2 - 3a - 4 \geqslant 0$ soit quand $a \in]-\infty ; -1] \cup [4 ; +\infty[$.

119. Médiatrices

1. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ et $x^2 + (y-2)^2 = 4$

2. $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ x^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 - x^2 = 0 \\ x^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4 = 0 \\ x^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$

donc les points B$(1 ; 2 + \sqrt{3})$ et D$(1 ; 2 - \sqrt{3})$.

3. ABCD est un losange.

120. À l'intérieur d'un cercle

1. $(x+3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 + 9 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$ cercle de centre (−3 ; 2) et de rayon 2.

2. D est le disque.

121. Intersection de cercles

1. $(x-6)^2 + (y+1)^2 = 100$ et $x^2 + (y+4)^2 = 25$.

2. $\begin{cases} (x-6)^2 + (y+1)^2 = 100 \\ x^2 + (y+4)^2 = 25 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 - 12x + y^2 + 2y = 63 \\ x^2 + y^2 + 8y = 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -12x - 6y = 54 \\ x^2 + y^2 + 8y = 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 9 \\ x^2 + (-2x-9)^2 + 8(-2x-9) = 9 \end{cases}$

4. Les points (0 ; −9) et (−4 ; −1).

122. Cercle et parabole

1. $x^2 + (y-3)^2 = 5$.

2. $\begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = 5 \\ y = x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (x^2-3)^2 = 5 \\ y = x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$

3. $X^2 - 5X + 4 = 0$ donc $X = 1$ ou $X = 4$ et donc $x \in \{-2\ ;-1\ ;1\ ;2\}$.

4. $(-2\ ;4)$ $(2\ ;4)$ $(-1\ ;1)$ $(1\ ;1)$.

Vers la T$^{\text{le}}$

123. 1. Ils sont orthogonaux si le triangle ACC′ est rectangle.

2. Les équations des cercles sont de la forme $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c$.

Donc la condition donne

$a^2 + b^2 - c + a'^2 + b'^2 - c' = (a-a')^2 + (b-b')^2$.

Soit $2aa' + 2bb' = c + c'$.

3. $a = 0$, $b = 0$ et $c = -1$ ce qui donne $c' = 1$ et donc les cercles orthogonaux ont pour équation $(x-a')^2 + (y-b')^2 = a'^2 + b'^2 - 1$.

4. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$.

124. Une construction précise

1. A(0 ;0) et B(7 ;0).

2. Il faut tracer un cercle de centre A et de rayon $\sqrt{13}$ et un cercle de centre B et de rayon $2\sqrt{5}$.

3. $x^2 + y^2 = 13$ et $(x-7)^2 + y^2 = 20$.

4. $\begin{cases} x^2 + y = 13 \\ (x-7)^2 + y^2 = 20 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ (x-7)^2 - x^2 = 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ -14x + 42 = 0 \end{cases}$ donc les points $(3\ ;2)$ et $(3\ ;-2)$.

5. C(3 ; 2)

125. Cercle des neuf points ou cercle d'Euler

1. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix}$ donc hauteur issue de A $x + y - 3 = 0$ et le projeté $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$ soit I(1 ; 2).

3. H(4 ; −1).

4. A′(0 ; 1) donc médiatrice de [BC] :

$x + y - 1 = 0$.

5. B′(1 ; −3) et C′(5 ; 1).

6. O(1 ; 0)

7. D(5 ; −2), E(4 ; 2) et F(0 ; −2).

8. $\Omega\left(\frac{5}{2}\ ;-\frac{1}{2}\right)$

9. $\Omega I = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$ on vérifie toutes les longueurs et le cercle a pour rayon $\frac{\sqrt{34}}{2}$.

Travaux pratiques p. 262-263

TP 1. Équation passant par trois points donnés

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Déterminer une équation d'un cercle à l'aide d'une résolution de système de trois équations à trois inconnues.

2. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

3. On remplace par les coordonnées des trois points.

4. $\begin{cases} a^2 - 8a + b^2 - 4b + 20 = r^2 \\ a^2 - 4a + b^2 - 12b + 40 = r^2 \\ a^2 + 4a + b^2 - 4b + 8 = r^2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -12a + 12 = 0 \\ -8a - 8b + 32 = 0 \\ a^2 + 4a + b^2 - 4b + 8 = r^2 \end{cases}$

6. $a = 1$, $b = 3$ et $r = \sqrt{10}$

7. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$

TP 2. Droites tangentes à un cercle

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Découvrir une droite particulière pour un cercle.

1. Le produit scalaire est nul car la tangente est perpendiculaire au rayon.

2. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$

3. Le point H appartient au cercle et le produit scalaire est nul cela donne le système.

4. $\begin{cases} a^2 - 3a + b^2 + b = 0 \\ a^2 - 6a + b^2 + 2b + 5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 - 3a + b^2 + b = 0 \\ 3a - b - 5 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} a^2 - 3a\sqrt{2}(3a - 5)^2 + 3a - 5 = 0 \\ 3a - 5 = b \end{cases}$

$\begin{cases} 10a^2 - 30a + 20 = 0 \\ 3a - 5 = b \end{cases}$

L'équation du second degré donne deux solutions $a = 1$ ou $a = 2$.

6. Donc (1 ; –2) et (2 ; 1). On obtient donc deux points du cercle qui ont leur tangente au cercle qui passe par l'origine.

TP 3. Distance d'un point à une droite

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Déterminer la distance d'un point à une droite de manière générale.

1. $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. $-3x - 2y + c = 0$ passe par A donc $-3 \times 1 - 2 \times 4 + c = 0$ ce qui donne donc $-3x - 2y + 11 = 0$.

3. H est solution du système suivant :

$\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ -3x - 2y + 11 = 0 \end{cases}$ qui donne $H\left(\dfrac{23}{13} ; \dfrac{37}{13}\right)$.

4. $AH = \sqrt{\left(1 - \dfrac{23}{13}\right)^2 + \left(4 - \dfrac{37}{13}\right)^2} = \dfrac{5\sqrt{13}}{13}$

5. $||\vec{n}|| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

6. $| 2 \times 1 - 3 \times 4 + 5 | = |-5| = 5$

7. $\dfrac{5}{\sqrt{13}} = \dfrac{5}{\sqrt{13}}\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \dfrac{5\sqrt{13}}{13}$

8. a) $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} = a(x - x_A) + b(y - y_A)$

$ax + by - ax_A - by_A = -c - ax_A - by_A$.

b) Les vecteurs sont colinéaires.

TP 4. Intersections de cercles et de droites

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Déterminer où se trouve l'ensemble des points d'intersection d'un cercle avec des droites parallèles entre elles.

B. Démonstration

1. $x^2 + (y - 2)^2 = b^2$

2. d' est horizontale donc $y = b$.

3. $\begin{cases} y = b \\ x^2 + (y - 2)^2 = b^2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y = b \\ x^2 + y^2 - 4y + 4 = b^2 \end{cases}$

D'où $x^2 - 4y + 4 = 0$ soit $y = \dfrac{x^2 + 4}{4}$.

M et N sont donc sur une parabole.

En autonomie p. 264-265

Déterminer une équation cartésienne de droite et un vecteur normal à une droite

126. a et **c**

127. c

128. b

129. c

130. 1. (1 ; 0).

2. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la médiatrice, comme $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, qui a donc une équation de la forme $x - y + c = 0$ et elle passe par le milieu, donc $x - y - 1 = 0$.

131. 1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$: un vecteur normal est $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. La perpendiculaire est de la forme $-2x + y + c = 0$ et passe par C, donc $-2x + y - 4 = 0$.

3. Le projeté vérifie $\begin{cases} x - 2y - 7 = 0 \\ -2x + y - 4 = 0 \end{cases}$

Par substitution $\begin{cases} x = 2y + 7 \\ -2(2y + 7) + y - 4 = 0 \end{cases}$

soit $\begin{cases} x = 2y + 7 \\ -3y - 10 = 0 \end{cases}$ Donc C$\left(\frac{1}{3} ; -\frac{10}{3}\right)$.

132. 1. $7x_D - 3y_D - 5 = 14 + 3 - 5 \neq 0$, donc D n'appartient pas à *d*.

2. Un vecteur normal à *d* est $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc *d'* est de la forme $-3x - 7y + c = 0$ et passe par D donc : $-3x - 7y - 1 = 0$.

3. Le projeté vérifie $\begin{cases} 7x - 3y - 5 = 0 \\ 3x + 7y + 1 = 0 \end{cases}$. Par combinaison, on obtient $\begin{cases} -21x + 9y + 15 = 0 \\ 21x + 49y + 7 = 0 \end{cases}$ qui donne $58y + 22 = 0$ et, de même, $\begin{cases} 49x - 21y - 35 = 0 \\ 9x + 21y + 3 = 0 \end{cases}$ qui donne $58x - 32 = 0$ et donc les coordonnées du projeté sont $\left(\frac{16}{29} ; -\frac{11}{29}\right)$.

133. 1. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ donc la hauteur est de la forme $5x + 6y + c = 0$, elle passe par A donc $5x + 6y + 14 = 0$.

2. H vérifie $\begin{cases} 6x - 5y + 13 = 0 \\ 5x + 6y + 14 = 0 \end{cases}$. Par combinaison, on obtient $\begin{cases} -30x + 25y - 65 = 0 \\ 30x + 36y + 84 = 0 \end{cases}$ qui donne $61y + 19 = 0$ et, de même, $\begin{cases} 36x - 30y + 78 = 0 \\ 25x + 30y + 70 = 0 \end{cases}$ qui donne $61x + 148 = 0$. Donc H$\left(-\frac{148}{61} ; -\frac{19}{61}\right)$.

3. Aire de ABC $= \frac{BC \times AH}{2} = 488$.

Déterminer des projetés orthogonaux

134. b **135. d** **136. c**

137. 1. La perpendiculaire à *d* passant par E est $3x + y + 6 = 0$ et G vérifie $\begin{cases} -x + 3y + 8 = 0 \\ 3x + y + 6 = 0 \end{cases}$ qui par substitution donne $\begin{cases} x = 3y + 8 \\ 3(3y + 8) + y + 6 = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 3y + 8 \\ 10y + 30 = 0 \end{cases}$ donc G$(-1 ; -3)$.

2. La perpendiculaire à *d* passant par G est $-2x + y + 1 = 0$ et F vérifie $\begin{cases} -2x + y + 1 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$ qui par substitution donne $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x + 2(2x - 1) - 3 - 0 = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 5x - 5 = 0 \end{cases}$ donc F$(1 ; 1)$.

3. EFG est rectangle en F donc son aire vaut $\frac{1}{2}\text{EF} \times \text{FG} = \frac{1}{2}\sqrt{20} \times \sqrt{20} = 10$.

138. 1. La droite (AB) a pour équation $-x + 3y - 6 = 0$ et sa perpendiculaire passant par C a pour équation $3x + y + 8 = 0$ et donc H vérifie $\begin{cases} -x + 3y - 6 = 0 \\ 3x + y + 8 = 0 \end{cases}$. Par substitution : $\begin{cases} x = 3y - 6 \\ 3(3y - 6) + y + 8 = 0 \end{cases}$ qui donne $\begin{cases} x = 3y - 6 \\ 10y - 10 = 0 \end{cases}$ et donc H$(-3 ; -1)$.

2. H est le symétrique de A par rapport à B.

3. L'aire du triangle ABC vaut : $\frac{1}{2}\text{AB} \times \text{CH} = \frac{1}{2}\sqrt{10} \times \sqrt{10} = 5$.

Déterminer l'équation d'un cercle

139. d **140. a** **141. d**

142. 1. $0^2 + 0 + 0^2 - 0 \neq 3$ donc O n'appartient pas à cet ensemble, $(-3)^2 - 18 + 4^2 - 4 = 3$ donc H appartient à cet ensemble et $(-3)^2 - 18 + (-3)^2 - (-3) = 3$ donc K appartient à cet ensemble.

2. Le milieu de [HK] : $\left(-3 ; \frac{1}{2}\right)$ et HK = 7 donc le cercle a pour équation $(x + 3)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$.

3. $x^2 + 6x + y^2 - y$

$= (x+3)^2 - 9 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

donc l'équation devient

$(x+3)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + 9 + 3 = \frac{49}{4}$.

143. 1. $(-2)^2 - 2(-2) + (-2)^2 + 4(-2) = 4 + 4 + 4 - 8 \neq 0$ donc D n'appartient pas à cet ensemble.

$1^2 - 2 + (-1)^2 + 4(-1) = 1 - 2 + 1 - 4 \neq 0$ donc V n'appartient pas à cet ensemble.

2. $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 4$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 - 5 = 4$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ qui est l'équation d'un cercle.

3. C'est donc un cercle de centre $(1 ; -2)$ et de rayon 3.

144. 1. $4x^2 - 8x + 4y^2 + 12y = 15$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{15}{4} + 1 + \frac{9}{4} = 7$

qui est l'équation d'un cercle.

2. Le centre est $A\left(1 ; -\frac{3}{2}\right)$ et le rayon est $\sqrt{7}$.

145. $x^2 - 6x + y^2 + 4ay + 12$

$= (x-3)^2 - 9 + (y+2a)^2 - 4a^2 + 12$

Ce qui donne $(x-3)^2 + (y+2a)^2 = 4a^2 - 3$

qui est un cercle si $4a^2 - 3 > 0$, c'est-à-dire pour

$a \in \left]-\infty ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{3}}{2} ; +\infty\right[$.

Son centre est le point $(3 ; -2a)$ et le rayon est $\sqrt{4a^2 - 3}$.

Déterminer les coordonnées de points d'intersection

146. d **147.** a **148.** c

149. 1. $x^2 + x + y^2 - 4y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y-2)^2 - 4 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{25}{4}$

Donc le centre est $C\left(-\frac{1}{2} ; 2\right)$ et le rayon est $\frac{5}{2}$.

2. On remarque que $OC = \frac{17}{4} > \frac{5}{2}$, donc ce cercle coupe les deux axes.

3. Pour $x = 0$ on obtient $y^2 - 4y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y-2)^2 = 6$ donc deux solutions : $(0 ; 2+\sqrt{6})$ et $(0 ; 2-\sqrt{6})$ et pour $y = 0$ on obtient $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, donc deux solutions : $(1 ; 0)$ et $(-2 ; 0)$.

150. 1. $x^2 - 8x + y^2 - 6y = 0$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ donc le cercle est de centre $(4 ; 3)$ et de rayon 5.

2. Pour $x = 0$ on obtient $y^2 - 6y = 0 \Leftrightarrow y(y-6) = 0$ donc deux solutions : $(0 ; 0)$ et $(0 ; 6)$.

Et pour $y = 0$ on obtient $x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x-8) = 0$ donc deux solutions : $(0 ; 0)$ et $(8 ; 0)$.

151. 1. La distance de F à la droite est 1, donc inférieure au rayon du cercle qui coupe donc cette droite en deux points.

2. $(x+3)^2 + y^2 = 5$

3. $\begin{cases} (x+3)^2 + y^2 = 5 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2 = 4 \\ y = 1 \end{cases}$

donc deux solutions : $(-1 ; 1)$ et $(-5 ; 1)$.

CHAPITRE 10 Probabilités conditionnelles et indépendance

Manuel p. 268-295

I. Introduction

Objectifs du chapitre

Ce chapitre reprend les notions vues en seconde sur les probabilités afin de mettre en place la notion de probabilité conditionnelle.

Celle-ci est d'abord introduite à partir du langage courant : on manipule le vocabulaire, les notations et on calcule des probabilités conditionnelles à partir d'un tableau d'effectifs.

On découvre ensuite les arbres pondérés (en s'appuyant sur la notion d'arbre de dénombrement vue en seconde) et les différentes règles permettant de calculer des probabilités avec ceux-ci sont introduites en s'appuyant sur les proportions. Un vaste choix d'exercices permet de s'exercer et notamment d'appréhender la problématique de l'inversion du conditionnement.

Dans une dernière partie, on découvre la notion d'indépendance de deux événements ainsi que les successions d'épreuves indépendantes dont l'étude sera développée en terminale via la loi binomiale.

Capacités

- → **Calculer des probabilités conditionnelles dans un tableau à double entrée.**
- → **Reconnaître et utiliser les probabilités conditionnelles (ou non) dans un énoncé.**
- → **Utiliser un arbre pondéré.**
- → **Inverser un conditionnement.**
- → **Utiliser l'indépendance de deux événements.**
- → **Représenter une succession de deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau.**

II. Corrigés des activités et exercices

Pour prendre un bon départ p. 269

1. Manipuler des événements

1. $p(A) = \frac{11}{20}$ et $p(B) = \frac{8}{20} = \frac{4}{10}$.

2. • L'événement $A \cap B$ est : « Le récipient a une anse et est un bol » et $p(A \cap B) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

• L'événement $A \cup B$ est : « Le récipient a une anse ou est un bol » et $p(A \cup B) = \frac{2+9+6}{20} = \frac{17}{10}$.

• L'événement $\overline{A} \cap B$ est : « Le récipient n'a pas d'anse et est un bol » et $p(\overline{A} \cap B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

3. L'événement « Le récipient est une tasse sans anse » est $\overline{B} \cap \overline{A}$.

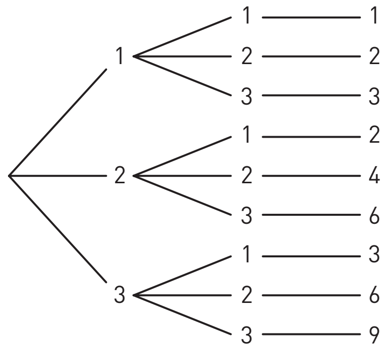
4. • La probabilité qu'une tasse ait une anse est $\frac{9}{12}$.

• La probabilité qu'un récipient à anse soit une tasse est $\frac{9}{11}$.

• La probabilité qu'un récipient soit une tasse à anse est $\frac{9}{20}$.

2. Représenter une expérience aléatoire par un arbre ou un tableau

1. L'arbre :



Le tableau :

1er tirage / 2e tirage	1	2	3
1	1	2	3
2	2	4	6
3	3	6	9

2. La loi de probabilité associée est :

Issue	1	2	3	4	6	9
Probabilité	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

3. La probabilité que le résultat soit pair est $p(2)+p(4)+p(6)=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$.

3. Manipuler des proportions de proportions

Cette proportion est $\frac{84}{100}\times\frac{47}{100}=0{,}3948$.

4. Calculer une probabilité dans le cas de non-équiprobabilité

1. $p(20)=1-0{,}3-0{,}2-0{,}1=0{,}4$

2. La probabilité d'attendre 10 minutes ou moins est $p(5)+p(10)=0{,}3+0{,}2=0{,}5$.

Activités p. 270-273

Activité 1. Découvrir les probabilités conditionnelles

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Introduire les probabilités conditionnelles et les premières formules à partir des proportions.

A. 1. a) $p(F)=\frac{49}{94}$; $p(E)=\frac{53}{94}$ et $p(F\cap E)=\frac{40}{94}$.

b) $\frac{40}{49}$

c) $p_E(F)$ est la probabilité que la personne soit une femme sachant qu'elle est employée ; $p_E(F)=\frac{40}{53}$.

$p_{\overline{F}}(\overline{E})$ est la probabilité que la personne soit ouvrier sachant que c'est un homme ; $p_{\overline{F}}(\overline{E})=\frac{32}{45}$.

2. a) $p(E)=0{,}57$ et $p_E(F)=0{,}76$.

b) Cette probabilité est :

$p(E)\times p_E(F)=0{,}57\times0{,}76=0{,}4332$.

B. 1. a) $p(L)=\frac{74}{97}$; $p(V)=\frac{21}{97}$ et $p(L\cap V)=\frac{15}{97}$.

b) $\frac{15}{74}$

c) $p_V(L)$ est la probabilité que le pois soit lisse sachant qu'il est vert ; $p_V(L)=\frac{15}{21}=\frac{5}{7}$.

$p_{\overline{V}}(\overline{L})$ est la probabilité que le pois soit ridé sachant qu'il est jaune ; $p_{\overline{V}}(\overline{L})=\frac{17}{76}$.

2. a) $p(L)=0{,}76$ et $p_L(V)=0{,}24$.

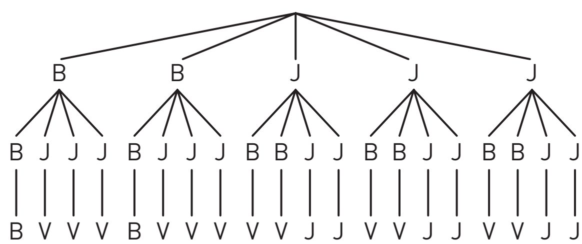
b) Cette probabilité est :

$p(L)\times p_L(V)=0{,}76\times0{,}24=0{,}1824$.

Activité 2. Représenter une situation par un arbre pondéré

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Découvrir les arbres pondérés et notamment la « règle du produit » à partir des arbres de dénombrement.

A. 1. L'arbre ci-dessous, où B désigne le bleu, J le jaune et V le vert, convient.



2. La loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire est :

Issue	Bleu	Jaune	Vert
Probabilité	$\frac{2}{20}=0{,}1$	$\frac{6}{20}=0{,}3$	$\frac{12}{20}=0{,}6$

B. 1. a) • 7 rouges et 3 jaunes

• 6 rouges et 3 jaunes • 7 rouges et 2 jaunes

b) • Il y aurait 90 branches : 10 pour le premier pot et 9 pour le deuxième pot, partant de chacune de ces 10 branches soit $10 \times 9 = 90$.

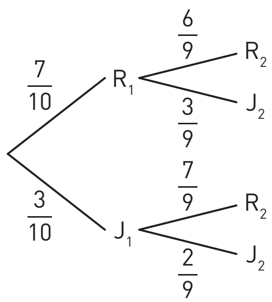
• Au bout de chacune des 7 branches correspondant à un premier pot rouge, il y a 6 branches correspondant à un deuxième pot rouge, ce qui donne $6 \times 7 = 42$ chemins correspondant à deux pots rouges.

La probabilité d'obtenir deux pots rouges est donc $\frac{42}{90}$.

• Au bout de chacune des 3 branches correspondant à un premier pot jaune, il y a 2 branches correspondant à un deuxième pot jaune, ce qui donne $3 \times 2 = 6$ chemins correspondant à deux pots jaunes.

La probabilité d'obtenir deux pots jaunes est donc $\frac{6}{90}$.

2. On obtient :



3. $\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{42}{90}$: on retrouve 42, le nombre de chemins correspondant à deux pots rouges dans l'arbre de dénombrement et 90 le nombre total de chemins dans l'arbre de dénombrement.

4. a) $p(R_1) = \frac{7}{10}$; $p(J_1) = \frac{3}{10}$; $p_{R_1}(R_2) = \frac{6}{9}$; $p_{R_1}(J_2) = \frac{3}{9}$; $p_{J_1}(R_2) = \frac{7}{9}$ et $p_{J_1}(J_2) = \frac{2}{9}$.

b) On sait que $p(R_1 \cap R_2) = p(R_1) \times p_{R_1}(R_2) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9}$.

5. On a $p(\text{rouge}) = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$.

De même, $p(\text{jaune}) = p(J_1 \cap J_2) = p(J_1) \times p_{J_1}(J_2)$

$= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$.

On en déduit que $p(\text{orange}) = 1 - p(\text{rouge}) - p(\text{jaune})$

$= 1 - \frac{7}{15} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15}$.

La loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire est donc :

Issue	Rouge	Jaune	Orange
Probabilité	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$

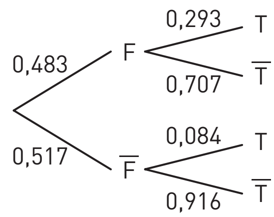
Pour le calcul de la probabilité d'obtenir la couleur orange, on peut « pousser » jusqu'à la formule des probabilités totales, mais celle-ci fait l'objet de l'activité 3.

Activité 3. Découvrir la formule des probabilités totales

• **Durée estimée :** 30 min

• **Objectif :** Introduire la formule des probabilités totales à partir des proportions.

A. 1.



2. a) La proportion de la population ayant un emploi qui sont des femmes à temps partiel est $0{,}483 \times 0{,}293 = 0{,}141519$, soit 14,1519 %.

b) La proportion de la population ayant un emploi qui sont des hommes à temps partiel est $0{,}517 \times 0{,}084 = 0{,}043428$, soit 4,3428 %.

3. $14{,}1519 + 4{,}3428 = 18{,}4947$, donc le pourcentage de la population ayant un emploi à temps partiel est 18,4947 %.

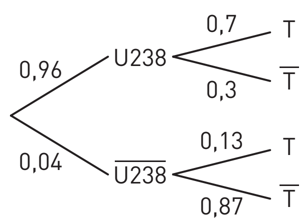
4. D'après la question précédente, $p(T) = 0{,}184947$.

On l'a obtenu avec :

$P(T) = 0{,}483 \times 0{,}293 + 0{,}517 \times 0{,}084$

$\quad = p(F) \times p_F(T) + p(\overline{F}) \times p_{\overline{F}}(T)$

B. 1.



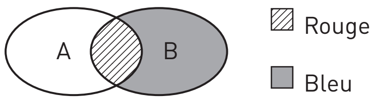
2. a) La proportion des atomes de départ qui sont des atomes d'uranium 238 encore présents sur Terre est $0{,}96 \times 0{,}7 = 0{,}672$, soit 67,2 %.

b) La proportion des atomes de départ qui sont des atomes d'uranium 235 encore présents sur Terre est $0{,}04 \times 0{,}13 = 0{,}0052$, soit 0,52 %.

3. $67{,}2 + 0{,}52 = 67{,}72$, donc le pourcentage des atomes de départ qui sont encore actuellement sur Terre est 67,72 %.

4. D'après la question précédente, $p(\mathrm{T}) = 0{,}6772$. On l'a obtenu avec $p(\mathrm{T}) = 0{,}96 \times 0{,}7 + 0{,}04 \times 0{,}13$
$= p(\mathrm{U238}) \times p_{\mathrm{U238}}(\mathrm{T}) + p(\overline{\mathrm{U238}}) \times p_{\overline{\mathrm{U238}}}(\mathrm{T})$

C. 1.



2. $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{B}$

3. L'intersection de $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ et $\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}$ est vide (aucune issue ne peut appartenir à la fois à A et $\overline{\mathrm{A}}$).

4. Ainsi, $p(\mathrm{B}) = p((\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + p(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$ puisque $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ et $\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}$ sont disjoints.
Il en résulte que $p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) + p(\overline{\mathrm{A}}) \times p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})$.

Activité 4. Découvrir la notion d'indépendance

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Introduire la notion d'indépendance de deux événements.

On définit généralement l'indépendance de deux événements A et B à partir de l'égalité $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B})$ qui présente l'avantage d'être symétrique, contrairement à $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B})$, mais porte moins de sens que cette dernière. Nous avons choisi ici de partir de $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B})$ pour donner d'emblée du sens à la notion d'indépendance et démontrer la symétrie, c'est-à-dire que l'on peut considérer de manière équivalente $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B})$ et $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = p(\mathrm{A})$ dans le cas où A et B sont indépendants.

A. 1. a)

Dé bleu / Dé rouge	1	2	3	4	5	6
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

b) $p(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{6}$

$$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{A})} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{36} \times \frac{6}{1} = \frac{1}{6}$$

c) Les résultats des deux lancers n'ayant « aucun lien » on peut penser que non, que l'on sache que A est réalisé ou non n'a pas d'influence sur la probabilité de réalisation de l'événement B, ce qui est confirmé par le calcul de la question **1. b)**.

2. a) *La réponse dépend des élèves.*

b) $p(\mathrm{C}) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$ et $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{C}) = \dfrac{1}{6}$ (dans la ligne 2, la seule issue réalisant l'événement est 2-3), donc $p(\mathrm{C}) \uparrow p_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})$: les événements A et C ne sont pas indépendants.

3. a) *La réponse dépend des élèves.*

b) $p(\mathrm{D}) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ et $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{D}) = \dfrac{1}{6}$ (dans la colonne 5, la seule issue réalisant l'événement est 5-5) donc $p(\mathrm{D}) = p_{\mathrm{B}}(\mathrm{D})$: les événements B et D sont indépendants.

B. 1. $\dfrac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{A})} = p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B})$ car A et B sont indépendants.

2. Par produit en croix, on déduit de l'égalité précédente que $\dfrac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{B})} = p(\mathrm{A})$ si $p(\mathrm{B}) \uparrow 0$.

3. De plus, $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \dfrac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}$, donc $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = p(\mathrm{A})$.

À vous de jouer ! p. 279-281

1. 1. $p_{\mathrm{E}}(\mathrm{V}) = \dfrac{7}{20}$; $p_{\mathrm{V}}(\mathrm{E}) = \dfrac{7}{18}$ et $p_{\overline{\mathrm{E}}}(\mathrm{V}) = \dfrac{11}{19}$.

2. On cherche $p_{\mathrm{E}}(\overline{\mathrm{V}}) = \dfrac{13}{20}$.

2. 1. $p_{\mathrm{R}}(\mathrm{T}_4) = \dfrac{74}{171}$; $p_{\mathrm{T}_4}(\mathrm{V}) = \dfrac{68}{228}$ et

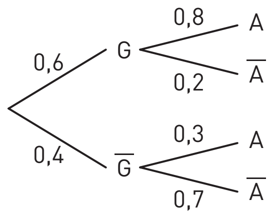
$p_{\overline{\mathrm{T}_4}}(\overline{\mathrm{V}}) = \dfrac{97+101}{281} = \dfrac{198}{281}$.

2. $\dfrac{86}{228}$

3. D'après l'énoncé, $p(\mathrm{C}) = 0{,}3$ et $p_{\mathrm{C}}(\mathrm{B}) = 0{,}45$ et on cherche $p(\mathrm{C} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{C}) \times p_{\mathrm{C}}(\mathrm{B}) = 0{,}3 \times 0{,}45 = 0{,}135$.

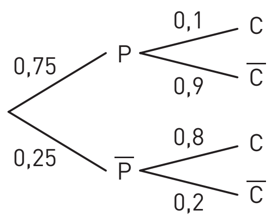
4. D'après l'énoncé, $p(\overline{C})=0{,}7$ et $p(\overline{C}\cap B)=0{,}245$ et on cherche $p_{\overline{C}}(B)=\dfrac{p(\overline{C}\cap B)}{p(\overline{C})}=\dfrac{0{,}245}{0{,}7}=0{,}35$.

5.



$$p(A)=p(G)\times p_G(A)+p(\overline{G})\times p_{\overline{G}}(A)$$
$$=0{,}6\times 0{,}8+0{,}4\times 0{,}3=0{,}6$$

6. On note :
- P l'événement « le jeu est un jeu de plateau » ;
- C l'événement « le jeu est compétitif ».

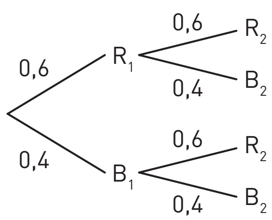


On cherche $p(\overline{C})=p(P)\times p_P(\overline{C})+p(\overline{P})\times p_{\overline{P}}(\overline{C})$
$=0{,}75\times 0{,}9+0{,}25\times 0{,}2=0{,}725$

7. 1. Le tirage est avec remise, donc on peut considérer que les tirages sont indépendants.

2. On appelle :
- R_1 l'événement « la première boule est rouge » ;
- B_1 l'événement « la première boule est bleue » ;
- R_2 l'événement « la deuxième boule est rouge » ;
- B_2 l'événement « la deuxième boule est bleue ».

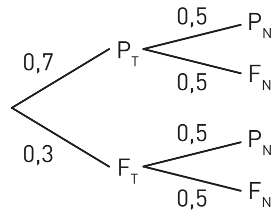
On a alors :



2e boule \ 1re boule	Rouge	Bleue
Rouge	$0{,}6\times 0{,}6=0{,}36$	$0{,}4\times 0{,}6=0{,}24$
Bleue	$0{,}6\times 0{,}4=0{,}24$	$0{,}4\times 0{,}4=0{,}16$

8. 1. Ce sont deux pièces différentes qui n'ont pas de lien l'une avec l'autre, donc on peut penser que les deux lancers sont indépendants.

2. On appelle :
- P_T l'événement « la pièce truquée donne Pile » ;
- F_T l'événement « la pièce truquée donne Face » ;
- P_N l'événement « la pièce normale donne Pile » ;
- F_N l'événement « la pièce normale donne Face ».



Pièce normale \ Pièce truquée	Pile	Face
Pile	$0{,}7\times 0{,}5=0{,}35$	$0{,}3\times 0{,}5=0{,}15$
Face	$0{,}7\times 0{,}5=0{,}35$	$0{,}3\times 0{,}5=0{,}15$

Exercices d'application p. 282-285

Apprendre à apprendre

9. 1. et **2.** On peut par exemple tracer deux branches en partant d'un même nœud dont la somme des probabilités associées n'est pas 1.

10. Deux événements disjoints n'ont aucune issue commune alors que deux événements sont indépendants quand la réalisation ou non de l'un n'a pas d'influence sur la réalisation de l'autre.

Questions – Flash

11. a) $p_A(B)=\dfrac{10}{27}$ **b)** $p_A(\overline{B})=\dfrac{17}{27}$

c) $p_B(A)=\dfrac{10}{19}$ **d)** $p_{\overline{A}}(\overline{B})=\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}$

12. $p_A(B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}=\dfrac{0{,}5}{0{,}6}=\dfrac{5}{6}$

13. $p(C)=0{,}27$; $p(\overline{C})=0{,}73$; $p_C(D)=0{,}44$; $p_C(\overline{D})=0{,}56$; $p_{\overline{C}}(D)=0{,}12$ et $p_{\overline{C}}(\overline{D})=0{,}88$.

14. a) $p(C \cap D) = p(C) \times p_C(D) = 0{,}27 \times 0{,}44 = 0{,}1188$

b) $p(\overline{C} \cap \overline{D}) = p(\overline{C}) \times p_{\overline{C}}(\overline{D}) = 0{,}73 \times 0{,}88 = 0{,}6424$

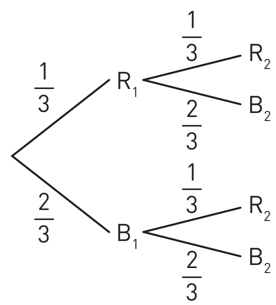
c) $p(D) = p(C) \times p_C(D) + p(\overline{C}) \times p_{\overline{C}}(D)$
$= 0{,}27 \times 0{,}44 + 0{,}73 \times 0{,}12 = 0{,}2064$

15. A et B sont indépendants, donc :
$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{6}{7} = \dfrac{2}{7}$

16. $p(E) = \dfrac{48}{54} = \dfrac{8}{9}$ et $p_C(E) = \dfrac{16}{18} = \dfrac{8}{9}$, donc $p(E) = p_C(E)$: E et C sont indépendants.

17. On appelle :

- R_1 l'événement « le premier lancer donne rouge » ;
- B_1 l'événement « le premier lancer donne bleu » ;
- R_2 l'événement « le deuxième lancer donne rouge » ;
- B_2 l'événement « le deuxième lancer donne bleu ».



1er lancer / 2e lancer	**Rouge**	**Bleu**
Rouge	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$
Bleu	$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$	$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

Utiliser les notations des probabilités conditionnelles

18. 1. a) $p_C(B)$ est la probabilité que le résultat soit 2 sachant qu'il est inférieur ou égal à 4.

b) $p_A(\overline{B})$ est la probabilité que le résultat soit différent de 2 sachant qu'il est pair.

2. a) La probabilité que le résultat soit pair sachant qu'il est inférieur ou égal à 4 est $p_C(A)$.

b) La probabilité que le résultat soit inférieur ou égal à 4 sachant qu'il est pair est $p_A(C)$.

19. 1. a) $p_L(R)$ est la probabilité que la personne aime la rhubarbe sachant qu'elle est lycéenne.

b) $p_R(\overline{F})$ est la probabilité que la personne ne soit pas fonctionnaire sachant qu'elle aime la rhubarbe.

2.a) La probabilité que la personne soit lycéenne sachant qu'elle n'est pas fonctionnaire est $p_{\overline{F}}(L)$.

b) La probabilité que la personne n'aime pas la rhubarbe sachant qu'elle est fonctionnaire est $p_F(\overline{R})$.

20. 1. $p_B(C)$ est la probabilité que l'entier soit 4, 76 ou 98 sachant qu'il est inférieur ou égal à 50.

2. a) La probabilité que cet entier soit inférieur ou égal à 50 sachant qu'il est impair est $p_A(B)$.

b) La probabilité que cet entier soit pair sachant qu'il est plus grand que 50 est $p_{\overline{B}}(\overline{A})$.

3. $p_A(C) = 0$

21. Dans ce cas, $p_\Omega(A) = p(A)$.

Calculer une probabilité conditionnelle sans formule

22. 1. $p(C) = \dfrac{13}{32}$; $p(S) = \dfrac{17}{32}$; $p(T) = \dfrac{7}{32}$

2. $p_T(C) = \dfrac{1}{7}$; $p_C(T) = \dfrac{1}{13}$

3. $p_C(\overline{S}) = \dfrac{3+1}{13} = \dfrac{4}{13}$

$p_{\overline{S}}(C) = \dfrac{3+1}{8+7} = \dfrac{4}{15}$

23. 1. $p(G) = \dfrac{3}{23}$ et $p(F) = \dfrac{9}{23}$.

2. • $p_M(F) = \dfrac{1}{6}$ • $p_F(M) = \dfrac{1}{9}$ • $p_F(A) = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

3. • $p_G(\overline{F}) = \dfrac{1}{3}$ • $p_{\overline{F}}(D) = \dfrac{5}{14}$

4. $p_G(M) = 0$

5. $p_D(\overline{F}) = \dfrac{5}{8}$

6. • $p_{G \cup D}(F) = \dfrac{2+3}{3+8} = \dfrac{5}{11}$

• $p_{\overline{F}}(M \cup A) = \dfrac{5+3}{14} = \dfrac{8}{14} = \dfrac{4}{7}$

24. $\dfrac{2}{3}$ (probabilité d'obtenir 1 ou 3 sachant que le résultat est 1, 3 ou 5)

25. a) $\dfrac{2}{7}$ (probabilité d'obtenir E ou I sachant que le résultat est D, E, F, G, H, I ou J)

b) $\dfrac{1}{3}$ (probabilité d'obtenir A sachant que le résultat est A, B ou C)

Calculer avec les probabilités conditionnelles

26. $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$

27. $p_C(D) = \dfrac{p(C \cap D)}{p(C)} = \dfrac{0,06}{0,1} = 0,6$

28. $p_V(U) = \dfrac{p(U \cap V)}{p(V)} = \dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{4}{3} = 0,5$

29. 1. a) $p(A) = 0,8$ et $p_A(S) = 0,45$.

b) $p(A \cap S) = p(A) \times p_A(S) = 0,8 \times 0,45 = 0,36$

2. a) $p(\overline{A} \cap \overline{S}) = 0,17$

b) $p(\overline{A}) = 0,2$

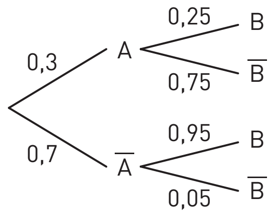
c) $p_{\overline{A}}(\overline{S}) = \dfrac{p(\overline{A} \cap \overline{S})}{p(\overline{A})} = \dfrac{0,17}{0,2} = 0,85$

30. 1. $p(F \cap C) = \dfrac{1}{24}$ et $p(C) = \dfrac{5}{24}$

2. $p_C(F) = \dfrac{p(F \cap C)}{p(C)} = \dfrac{\frac{1}{24}}{\frac{5}{24}} = \dfrac{1}{24} \times \dfrac{24}{5} = \dfrac{1}{5}$

Utiliser un arbre pondéré

31.



• $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0,3 \times 0,25 = 0,075$

• $p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B) = 0,7 \times 0,95 = 0,665$

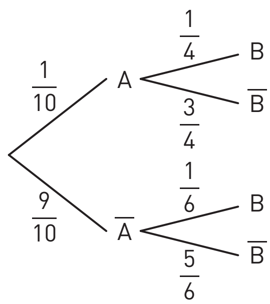
• $p(A \cap \overline{B}) = p(A) \times p_A(\overline{B}) = 0,3 \times 0,75 = 0,225$

• $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,7 \times 0,05 = 0,035$

• $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = 0,075 + 0,665 = 0,74$

• $p(\overline{B}) = p(A \cap \overline{B}) + p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,225 + 0,035 = 0,26$

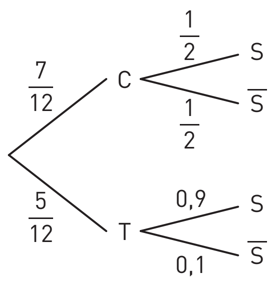
32. 1.



2. $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{4} = 0,025$

3. $p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{9}{10} \times \dfrac{1}{6}$
$= 0,175$

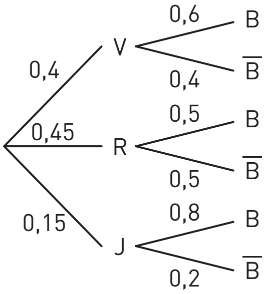
33. 1.



2. $p(C \cap S) = p(C) \times p_C(S) = \dfrac{7}{12} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{24}$

3. $p(\overline{S}) = p(C) \times p_C(\overline{S}) + p(T) \times p_T(\overline{S}) = \dfrac{7}{12} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{12} \times 0,1 = \dfrac{1}{3}$

34. 1.



2. $p(\text{J} \cap \text{B}) = p(\text{J}) \times p_{\text{J}}(\text{B}) = 0{,}15 \times 0{,}8 = 0{,}12$

3. • $p(\text{B}) = p(\text{V}) \times p_{\text{V}}(\text{B}) + p(\text{R}) \times p_{\text{R}}(\text{B}) + p(\text{J}) \times p_{\text{J}}(\text{B})$
$= 0{,}4 \times 0{,}6 + 0{,}45 \times 0{,}5 + 0{,}15 \times 0{,}8 = 0{,}585$

• $p(\overline{\text{B}}) = 1 - 0{,}585 = 0{,}415$

Utiliser l'indépendance de deux événements

35. $p(\text{A}) \times p(\text{B}) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18 \neq p(\text{A} \cap \text{B})$, donc A et B ne sont pas indépendants.

36. $p(\text{A}) \times p(\text{B}) = \dfrac{5}{12} \times \dfrac{3}{10} = \dfrac{1}{8} = p(\text{A} \cap \text{B})$, donc A et B sont indépendants.

37. Par indépendance de C et D :

• $p_{\text{C}}(\text{D}) = p(\text{D}) = 0{,}65$

• $p_{\text{D}}(\text{C}) = p(\text{C}) = 0{,}12$

• $p(\text{C} \cap \text{D}) = p(\text{C}) \times p(D) = 0{,}65 \times 0{,}12 = 0{,}078$

38. Par indépendance de E et F :
$p(\text{E} \cap \text{F}) = p(\text{E}) \times p(\text{F})$, donc

$$p(\text{F}) = \frac{p(\text{E} \cap \text{F})}{p(\text{E})} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{12} \times 3 = \frac{1}{4}.$$

39. D'après l'énoncé, $p(\text{D}) = 0{,}8$, $p(\text{M}) = 0{,}45$ et $p_{\text{M}}(\overline{\text{D}}) = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$.

On en déduit que $p_{\text{M}}(\text{D}) = 0{,}8 = p(\text{D})$ donc M et D sont indépendants.

40. a) $p_{\text{B}}(\text{D}) = \dfrac{8}{13}$ et $p(\text{D}) = \dfrac{16}{24} = \dfrac{2}{3}$, donc $p_{\text{B}}(\text{D}) \uparrow p(\text{D})$: B et D ne sont pas indépendants.

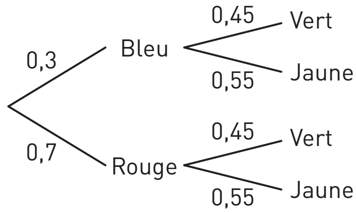
b) $p_{\text{R}}(\overline{\text{D}}) = 0$ et $p(\overline{\text{D}}) = \dfrac{1}{3}$,donc $p_{\text{R}}(\overline{\text{D}}) \uparrow p(\overline{\text{D}})$: R et $\overline{\text{D}}$ ne sont pas indépendants.

c) $p_{\text{N}}(\text{D}) = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$ et $p(\text{D}) = \dfrac{2}{3}$, donc $p_{\text{N}}(\text{D}) = p(\text{D})$: N et D sont indépendants.

d) N et D sont indépendants, donc N et $\overline{\text{D}}$ sont indépendants d'après le cours.

Représenter une succession de deux épreuves indépendantes

41. 1.

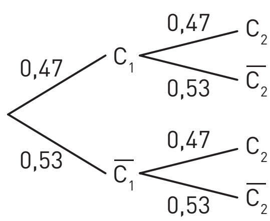


2.

2e épreuve \ 1re épreuve	Bleu	Rouge
Vert	$0{,}3 \times 0{,}45$ $= 0{,}135$	$0{,}7 \times 0{,}45$ $= 0{,}315$
Jaune	$0{,}3 \times 0{,}55$ $= 0{,}165$	$0{,}7 \times 0{,}55$ $= 0{,}385$

42. 1. On peut penser qu'il y a indépendance car on admet que la présence de courrier ou non dans sa boîte à lettres un soir n'a pas d'influence sur celle du soir suivant.

2. On appelle C_1 l'événement « il y a du courrier le 1er soir » et C_2 l'événement « il y a du courrier le 2e soir ».



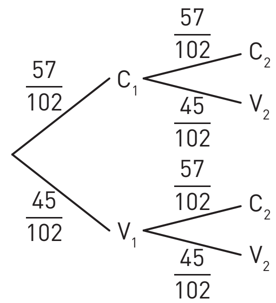
3.

2e soir \ 1er soir	Courrier	Pas de courrier
Courrier	$0{,}47 \times 0{,}47$ $= 0{,}2209$	$0{,}53 \times 0{,}47$ $= 0{,}2491$
Pas de courrier	$0{,}47 \times 0{,}53$ $= 0{,}2491$	$0{,}53 \times 0{,}53$ $= 0{,}2809$

43. 1. Oui car c'est la modélisation implicitement adoptée pour des tirages avec remise.

2. On appelle :

- C_1 l'événement « on obtient une consonne au 1er tirage » ;
- V_1 l'événement « on obtient une voyelle au 1er tirage » ;
- C_2 l'événement « on obtient une consonne au 2e tirage » ;
- V_2 l'événement « on obtient une voyelle au 2e tirage ».

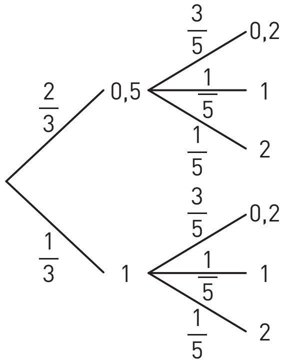


3.

1er tirage / 2e tirage	Consonne	Voyelle
Consonne	$\frac{57}{102}\times\frac{57}{102}$ $\approx 0,31$	$\frac{45}{102}\times\frac{57}{102}$ $\approx 0,25$
Voyelle	$\frac{57}{102}\times\frac{45}{102}$ $\approx 0,25$	$\frac{45}{102}\times\frac{45}{102}$ $\approx 0,19$

44. 1. « Physiquement », il n'y a pas de lien entre la poche d'Ornella et celle de Fanny, donc on peut penser que c'est une succession de deux épreuves indépendantes (ceci dit, la « succession » est artificielle ici, les deux tirages pouvant aussi bien être simultanés sans changer les probabilités des différentes issues).

2.



3.

Poche d'Ornella / Poche de Fanny	0,5 €	1 €
0,2 €	$\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=0,4$	$\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=0,2$
1 €	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}\approx 0,13$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\approx 0,07$
2 €	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}\approx 0,13$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\approx 0,07$

Calculs et automatismes

45. 0,8

46. $\frac{7}{9}$

47. $\frac{19}{32}$

48. $\frac{3}{7}$

Exercices d'entraînement p. 286-289

Calculer avec des probabilités conditionnelles

49. $p(\overline{D}) = 1 - p(D) = 1 - 0,6 = 0,4$,

donc $p_{\overline{D}}(C) = \frac{p(\overline{D}\cap C)}{p(\overline{D})} = \frac{0,35}{0,4} = 0,875$.

50. $p_E(F) = \frac{p(E\cap F)}{p(E)} = \frac{0}{p(E)} = 0$ car E et F sont disjoints.

51. a) $p(A\cap B) = p(A) + p(B) - p(A\cup B)$

$= 0,37 + 0,68 - 0,84 = 0,21$

Ainsi, $p_A(B) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)} = \frac{0,21}{0,37} = \frac{21}{37}$.

b) $p_B(A) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{0,21}{0,68} = \frac{21}{68}$

52. a) $p(A\cap B) = p(A)\times p_A(B) = 0,63\times 0,06 = 0,0378$

b) $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B) = 1 - 0,06 = 0,94$ donc

$p(A\cap\overline{B}) = p(A)\times p_A(\overline{B}) = 0,63\times 0,94 = 0,5922$ (on aurait aussi pu calculer $0,63 - 0,0378 = 0,5922$).

53. a) $p(\overline{E}\cap F)=p(\overline{E})\times p_{\overline{E}}(F)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{7}{12}=\dfrac{7}{18}$

b) $p(\overline{E}\cap \overline{F})=p(\overline{E})\times p_{\overline{E}}(\overline{F})=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{5}{12}=\dfrac{5}{18}$

54. Lorsque l'on rencontre un adhérent, on appelle :

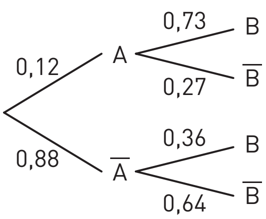
• G l'événement « l'adhérent est un garçon » ;

• L l'événement « l'adhérent a emprunté plus de 50 livres ».

D'après l'énoncé, $p(G)=0{,}55$ et $p(G\cap L)=0{,}2$ et on cherche $p_G(L)=\dfrac{p(G\cap L)}{p(G)}=\dfrac{0{,}2}{0{,}55}\approx 0{,}36$.

Construire un arbre pondéré

55.



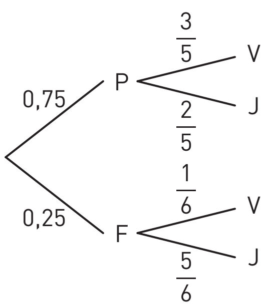
56. Lorsque l'on réalise cette expérience aléatoire, on appelle :

• P l'événement « la pièce tombe sur Pile » ;

• F l'événement « la pièce tombe sur Face » ;

• V l'événement « la boule est verte » ;

• J l'événement « la boule est jaune ».

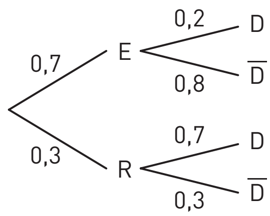


57. Lorsque l'on prélève un objet au hasard dans la production, on appelle :

• E l'événement « c'est une équerre » ;

• R l'événement « c'est un rapporteur » ;

• D l'événement « il a un défaut ».



Partitions de l'univers

58. Non car $A\cup B\cup C$ est différent de l'univers puisque cette union ne contient pas les personnes ayant 18 ou 19 ans.

59. a) Les ensembles $A=\{1\,;2\}$, $B=\{9\}$, $C=\{3\,;5\,;7\}$ et $D=\{4\,;6\,;8\,;10\}$ forment une partition de l'univers car ils sont tous disjoints et que leur union est bien l'univers $\Omega=\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\}$.

b) De même, les événements E : « le nombre obtenu est un nombre pair inférieur ou égal à 10 », F : « le nombre obtenu est un nombre impair inférieur à 8 » et G : « le nombre obtenu est 9 » forment une partition de l'univers.

60. $C=\overline{A\cup B}$

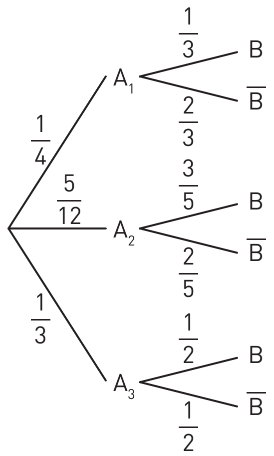
61. 1. a) $p(A_3)=1-p(A_1)-p(A_2)=1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{5}{12}=\dfrac{1}{3}$

b) $p(A_1\cap B)=p(A_1)\times p_{A_1}(B)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$

c) $p_{A_2}(B)=\dfrac{p(A_2\cap B)}{p(A_2)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{12}{5}=\dfrac{3}{5}$

d) $p_{A_3}(\overline{B})=\dfrac{p(A_3\cap\overline{B})}{p(A_3)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{3}{1}=\dfrac{1}{2}$

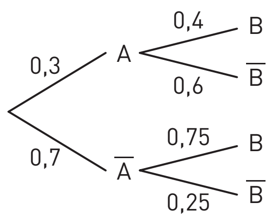
2.



3. $p(A_1 \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{5}{12} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

Inversion du conditionnement

62. 1.



2. $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$

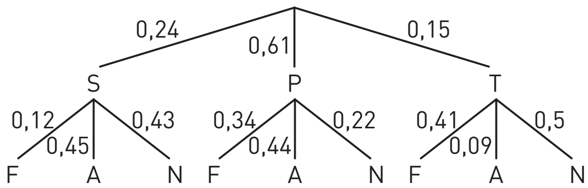
3. $p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$
$= 0,3 \times 0,4 + 0,7 \times 0,75 = 0,645$

On en déduit $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0,12}{0,645} \approx 0,186.$

4. $p_{\overline{B}}(A) = \dfrac{p(A \cap \overline{B})}{p(\overline{B})} = \dfrac{0,3 \times 0,6}{1 - 0,645} \approx 0,507$

5. La probabilité que la dragée contienne une amande sachant qu'elle est rose est supérieure à la probabilité que la dragée contienne une amande sachant qu'elle est bleue, donc elle a plutôt intérêt à choisir une dragée rose.

63. 1.



2. a) $p(N \cap S) = p(S) \times p_S(N) = 0,24 \times 0,43 = 0,1032$

b) $p(N) = p(S) \times p_S(N) + p(P) \times p_P(N) + p(T) \times p_T(N)$
$= 0,24 \times 0,43 + 0,61 \times 0,22 + 0,15 \times 0,5 = 0,3124$

c) $p_N(S) = \dfrac{p(N \cap S)}{p(N)} = \dfrac{0,1032}{0,3124} \approx 0,33$

3. On cherche à comparer $p_N(S)$, $p_N(P)$ et $p_N(T)$ or :

- $p_N(S) \approx 0,33$;
- $p_N(P) = \dfrac{0,61 \times 0,22}{0,3124} \approx 0,43$;
- $p_N(T) = \dfrac{0,15 \times 0,5}{0,3124} \approx 0,24.$

Donc si l'on sait que l'élève fait de la natation, il est plus probable qu'il soit en première.

4. a) $p(A \cup N) = p(A) + p(N)$ car A et N sont disjoints, donc :
$p(A \cup N) = 0,24 \times 0,45 + 0,61 \times 0,44 + 0,15 \times 0,09 + 0,3124$
$= 0,7023$

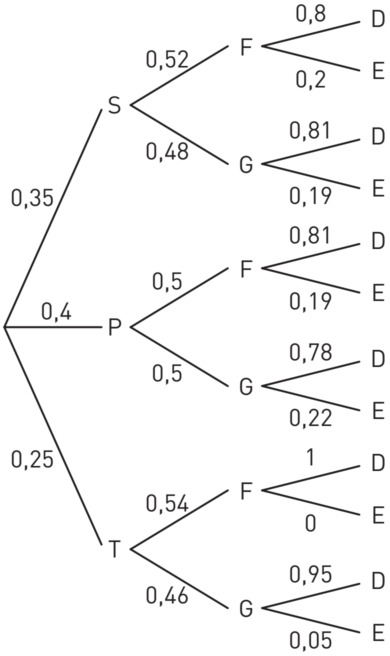
b) On cherche :
$p(S) + p(P \cap F) + p(T \cap F) = 0,24 + 0,61 \times 0,34 + 0,15 \times 0,41$
$= 0,5089$

64. 1.

Quand on rencontre une de ces personnes au hasard, on considère les événements :

- S : « l'élève est en seconde » ;
- P : « l'élève est en première » ;
- T : « l'élève est en terminale » ;
- F : « l'élève est une fille » ;
- G : « l'élève est un garçon » ;
- D : « l'élève est demi-pensionnaire » ;
- E : « l'élève est externe ».

On a alors l'arbre ci-dessous.

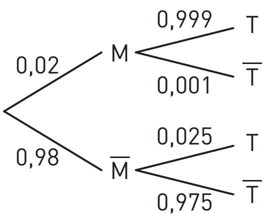


2. $p(\mathrm{E}) = 0{,}35 \times 0{,}52 \times 0{,}2 + 0{,}35 \times 0{,}48 \times 0{,}19 + 0{,}4 \times 0{,}5 \times 0{,}19 + 0{,}4 \times 0{,}5 \times 0{,}22 + 0{,}25 \times 0{,}54 \times 0 + 0{,}25 \times 0{,}46 \times 0{,}05 = 0{,}15607$

3. On cherche $p_{\mathrm{E}}(\mathrm{G} \cap \mathrm{S}) = \dfrac{p(\mathrm{G} \cap \mathrm{S} \cap \mathrm{E})}{p(\mathrm{E})}$

$= \dfrac{0{,}35 \times 0{,}48 \times 0{,}19}{0{,}15607} \approx 0{,}2045.$

65. 1.



2. a) • $p(\mathrm{M} \cap \mathrm{T}) = p(\mathrm{M}) \times p_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = 0{,}02 \times 0{,}999 = 0{,}01998$

• $p(\mathrm{T}) = p(\mathrm{M}) \times p_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) + p(\overline{\mathrm{M}}) \times p_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{T}) = 0{,}02 \times 0{,}999 + 0{,}98 \times 0{,}025 = 0{,}04448$

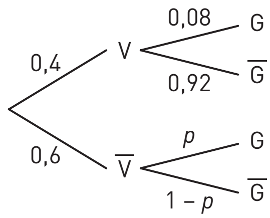
b) $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) = \dfrac{p(\mathrm{M} \cap \mathrm{T})}{p(\mathrm{T})} = \dfrac{0{,}01998}{0{,}04448} \approx 0{,}45$

c) Ce test n'est pas vraiment efficace car quand il est positif, il n'y a que « 45 % de chance » que la personne soit malade.

Avec une inconnue

66. 1. $p(\mathrm{G}) = 0{,}2$, d'après l'énoncé.

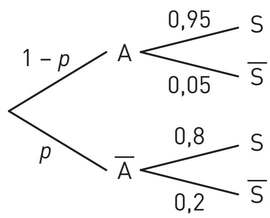
2. On a l'arbre ci-dessous où p est inconnue :



3. $p(\mathrm{V} \cap \mathrm{G}) = p(\mathrm{V}) \times p_{\mathrm{V}}(\mathrm{G}) = 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}032$

4. $p(\mathrm{G}) = p(\mathrm{V} \cap \mathrm{G}) + p(\overline{\mathrm{V}} \cap \mathrm{G})$, donc $p(\overline{\mathrm{V}} \cap \mathrm{G}) = 0{,}2 - 0{,}032 = 0{,}168$, puis $p_{\overline{\mathrm{V}}}(\mathrm{G}) = \dfrac{p(\overline{\mathrm{V}} \cap G)}{p(\overline{\mathrm{V}})} = \dfrac{0{,}168}{0{,}6} = 0{,}28.$

67. 1.



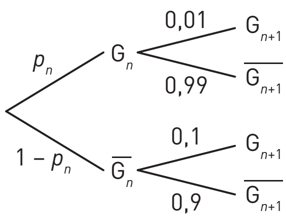
2. Il s'agit de trouver p le plus grand nombre possible tel que $p(\mathrm{S}) \geqslant 0{,}9$ or
$p(\mathrm{S}) = p(\mathrm{A}) \times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{S}) + p(\overline{\mathrm{A}}) \times p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{S})$
$= (1 - p) \times 0{,}95 + p \times 0{,}8 = 0{,}95 - 0{,}15p$

Résolvons donc $0{,}95 - 0{,}15p \geqslant 0{,}9 \Leftrightarrow -0{,}15p \geqslant -0{,}05$
$\Leftrightarrow p \leqslant \dfrac{-0{,}05}{-0{,}15} \Leftrightarrow p \leqslant \dfrac{1}{3}$

En conclusion, cette entreprise doit utiliser la société B pour un tiers de ses livraisons au maximum.

Probabilités et suites

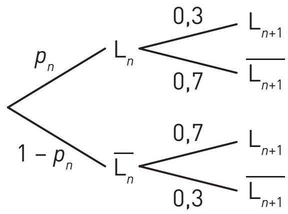
68. 1.



2. $p_{n+1} = p(\mathrm{G}_{n+1}) = p(\mathrm{G}_n) \times p_{\mathrm{G}_n}(\mathrm{G}_{n+1}) + p(\overline{\mathrm{G}_n}) \times p_{\overline{\mathrm{G}_n}}(\mathrm{G}_{n+1})$
$= p_n \times 0{,}01 + (1 - p_n) \times 0{,}1 = 0{,}01p_n + 0{,}1 - 0{,}1p_n$
$= -0{,}09p_n + 0{,}1$

3. $p_{10} \approx 0{,}092$, d'après la calculatrice : cela veut dire que quand on commence à jouer, la probabilité de gagner la 10[e] partie est environ 0,092.

69. 1.



2. $p_{n+1} = p(L_{n+1}) = p(L_n) \times p_{L_n}(L_{n+1}) + p(\overline{L_n}) \times p_{\overline{L_n}}(L_{n+1})$
$= p_n \times 0{,}3 + (1 - p_n) \times 0{,}7 = 0{,}3p_n + 0{,}7 - 0{,}7p_n$
$= -0{,}4p_n + 0{,}7$

3. a) $v_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}5 = -0{,}4p_n + 0{,}7 - 0{,}5 = -0{,}4p_n + 0{,}2$

b) $p_n = v_n + 0{,}5$

c) $v_{n+1} = -0{,}4p_n + 0{,}2 = -0{,}4(v_n + 0{,}5) + 0{,}2$
$= -0{,}4v_n - 0{,}2 + 0{,}2 = -0{,}4v_n$

d) D'après la question précédente, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = -0{,}4$.

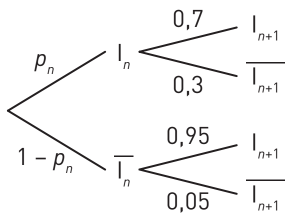
e) $v_1 = p_1 - 0{,}5 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

Donc $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0{,}5 \times (-0{,}4)^{n-1}$.

On en déduit que $p_n = v_n + 0{,}5 = 0{,}5 \times (-0{,}4)^{n-1} + 0{,}5$.

4. On peut conjecturer que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}5$, ce qui veut dire que, si l'on se place le premier soir, la probabilité que Bachir lise un livre est proche de 0,5 pour les soirs éloignés du premier soir.

70. 1.



2. $p_{n+1} = p(I_{n+1}) = p(I_n) \times p_{I_n}(I_{n+1}) + p(\overline{I_n}) \times p_{\overline{I_n}}(I_{n+1})$
$= p_n \times 0{,}7 + (1 - p_n) \times 0{,}95 = 0{,}7p_n + 0{,}95 - 0{,}95p_n$
$= -0{,}25p_n + 0{,}95$

3. a) $u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}76 = -0{,}25p_n + 0{,}95 - 0{,}76$
$= -0{,}25p_n + 0{,}19 = -0{,}25(u_n + 0{,}76) + 0{,}19$
$= -0{,}25u_n - 0{,}19 + 0{,}19 = -0{,}25u_n$

Donc (u_n) est géométrique de raison $q = -0{,}25$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0{,}76 = 0 - 0{,}76 = -0{,}76$.

b) On a donc $u_n = u_1 \times q^{n-1} = -0{,}76 \times (-0{,}25)^{n-1}$, puis $p_n = u_n + 0{,}76 = -0{,}76 \times (-0{,}25)^{n-1} + 0{,}76$.

4. $-0{,}76 \times (-0{,}25)^{120-1} + 0{,}76 \approx 0{,}76$

Indépendance

71. E et F sont indépendants, donc $p(E \cap F) = p(E) \times p(F)$.

Ainsi, $p(E) = \dfrac{p(E \cap F)}{p(F)} = \dfrac{0{,}25}{0{,}47} = \dfrac{25}{47}$.

72. $p(C \cup D) = p(C) + p(D) - p(C \cap D)$ donc $p(D) = p(C \cup D) + p(C \cap D) - p(C)$.

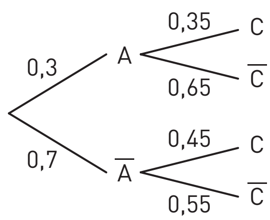
De plus, $p(C \cap D) = p(C) \times p(D)$ par indépendance de C et D, donc $p(D) = p(C \cup D) + p(C) \times p(D) - p(C)$

$\Leftrightarrow p(D) - p(C) \times p(D) = p(C \cup D) - p(C)$

$\Leftrightarrow p(D)(1 - p(C)) = p(C \cup D) - p(C)$

$\Leftrightarrow p(D) = \dfrac{p(C \cup D) - p(C)}{1 - p(C)} = \dfrac{0{,}23 - 0{,}11}{1 - 0{,}11} = \dfrac{0{,}12}{0{,}89} = \dfrac{12}{89}$

73. 1.

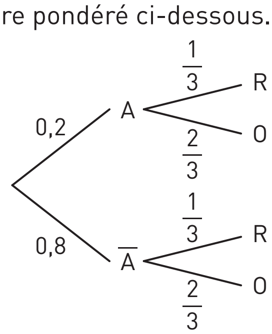


2. $p(C) = p(A) \times p_A(C) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(C)$
$= 0{,}3 \times 0{,}35 + 0{,}7 \times 0{,}45 = 0{,}42$,

et $p_A(C) = 0{,}35$, donc $p_A(C) \uparrow p(C)$: les événements A et C ne sont pas indépendants.

74. On considère les événements :
- A : « `a=1` » ;
- R : « le programme affiche `Rouge` » ;
- O : « le programme affiche `Orange` ».

On peut représenter l'expérience aléatoire associée par l'arbre pondéré ci-dessous.

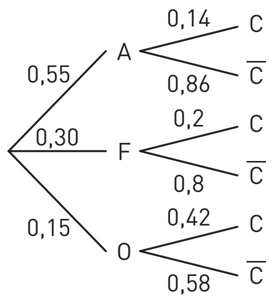


$p(\text{R}) = p(\text{A}) \times p_{\text{A}}(\text{R}) + p(\overline{\text{A}}) \times p_{\overline{\text{A}}}(\text{R}) = 0{,}2 \times \dfrac{1}{3} + 0{,}8 \times \dfrac{1}{3}$
$= \dfrac{1}{3} = p_{\text{A}}(\text{R})$, donc A et R sont indépendants.

75. En plus des événements donnés dans l'énoncé, on considère :

- A : « le meuble choisi est un canapé » ;
- O : « le meuble choisi est un pouf ».

On a alors :

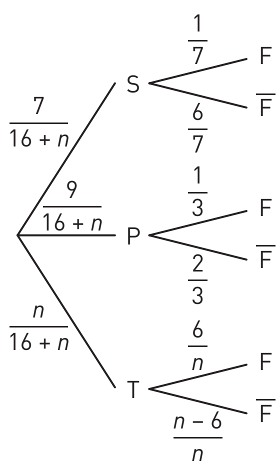


De plus, $p(\text{C}) = p(\text{A}) \times p_{\text{A}}(\text{C}) + p(\text{F}) \times p_{\text{F}}(\text{C}) + p(\text{O}) \times p_{\text{O}}(\text{C})$
$= 0{,}55 \times 0{,}14 + 0{,}3 \times 0{,}2 + 0{,}15 \times 0{,}42 = 0{,}2 = p_{\text{F}}(\text{C})$, donc F et C sont indépendants.

76. On considère les événements :

- S : « l'élève est en seconde » ;
- P : « l'élève est en première » ;
- T : « l'élève est en terminale » ;
- F : « l'élève est une fille ».

L'arbre pondéré ci-dessous représente la situation.



Les événements T et F sont indépendants si, et seulement si, $p(\text{F}) = p_{\text{T}}(\text{F})$ or :

$p(\text{F}) = p(\text{S}) \times p_{\text{S}}(\text{F}) + p(\text{P}) \times p_{\text{P}}(\text{F}) + p(\text{T}) \times p_{\text{T}}(\text{F})$

$= \dfrac{7}{16+n} \times \dfrac{1}{7} + \dfrac{9}{16+n} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{n}{16+n} \times \dfrac{6}{n} = \dfrac{1}{16+n} + \dfrac{3}{16+n}$
$+ \dfrac{6}{16+n} = \dfrac{10}{16+n}$ et $p_{\text{T}}(\text{F}) = \dfrac{6}{n}$.

Il s'agit donc, pour $n > 0$ et entier, de résoudre
$\dfrac{10}{16+n} = \dfrac{6}{n} \Leftrightarrow 10n = 6(16+n) \Leftrightarrow 10n = 96 + 6n \Leftrightarrow 4n = 96$
$\Leftrightarrow n = 24$.

Épreuves indépendantes

77. On appelle p la probabilité d'obtenir Pile.

On a alors :

1er lancer / 2e lancer	**Pile**	**Face**
Pile	p^2	$(1-p) \times p$ $= p - p^2$
Face	$p \times (1-p)$ $= p - p^2$	$(1-\text{p})^2$ $= 1 - 2\text{p} + \text{p}^2$

Il s'agit donc de résoudre :

$2(p - p^2) = 0{,}4 \Leftrightarrow 2p^2 - 2p + 0{,}4 = 0$

On calcule le discriminant de $2p^2 - 2p + 0{,}4$.

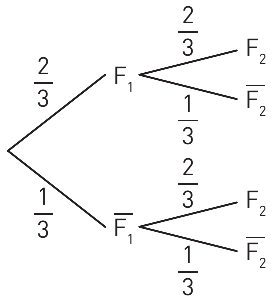
$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 0{,}4 = 0{,}8 > 0$, donc il y a deux racines réelles, donc deux valeurs possibles pour p :

$p_1 = \dfrac{2 + \sqrt{0{,}8}}{4}$ ou $p_2 = \dfrac{2 - \sqrt{0{,}8}}{4}$ (ces deux nombres étant compris entre 0 et 1).

78. 1. *A priori*, le résultat du premier lancer n'a pas d'influence sur le résultat du deuxième, donc on peut penser que les deux épreuves sont indépendantes.

2. On considère les événements :

- F_1 : « le résultat du premier lancer est favorable, c'est-à-dire dans $\{1\,;3\,;5\,;6\}$ » ;
- F_2 : « le résultat du deuxième lancer est favorable, c'est-à-dire dans $\{1\,;3\,;5\,;6\}$ ».



1^er lancer / 2^e lancer	Favorable	Non favorable
Favorable	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$
Non favorable	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

La probabilité qu'il gagne en deux coups est donc $\frac{4}{9}$.

79. 1. a)

Coup d'Elsa / Coup de Dwayne	Pierre	Feuille	Ciseau
Pierre	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$
Feuille	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$
Ciseau	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

b) La probabilité d'un match nul est $3\times\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$.

2. a)

Coup d'Elsa / Coup de Dwayne	Pierre	Feuille	Ciseau
Pierre	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$
Feuille	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$
Ciseau	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

b) On rappelle que :

– la pierre bat le ciseau ;

– le ciseau bat la feuille ;

– la feuille bat la pierre.

On a marqué en blanc dans le tableau les cas de victoire d'Elsa, en gris clair les victoires de Dwayne et en gris foncé les cas de match nul.

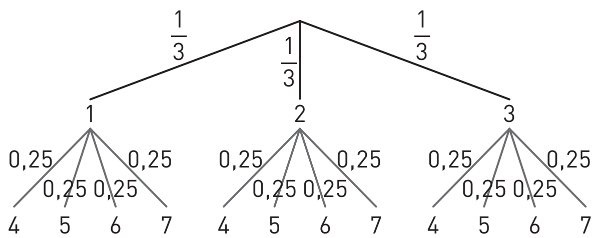
La probabilité qu'Elsa gagne est $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$.

La probabilité que Dwayne gagne est $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$.

La probabilité de match nul est $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$.

Autrement dit, cette stratégie ne permet pas à Dwayne d'améliorer ses chances de victoires (mais ne les diminue pas non plus).

80.



1^er nombre / 2^e nombre	1	2	3
4	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$
5	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$
6	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$
7	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

La probabilité que la somme des deux nombres obtenus soit paire est $6\times\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$.

Travailler autrement

81. et **82.** On appelle :

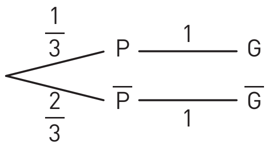
• P l'événement « la porte choisie au premier tour est la bonne » ;

• G l'événement « on gagne le jeu ».

A. Dans le cas où l'on décide préalablement que l'on ne changera pas de porte

• Si on a choisi la bonne porte dans la première phase, on gagne (puisqu'on n'en change pas).

• Si on a choisi la mauvaise porte dans la première phase, on perd (puisqu'on n'en change pas).

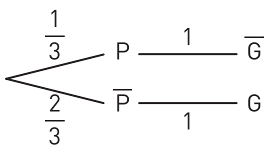


La probabilité de gagner est donc $\frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$.

B. Dans le cas où l'on décide préalablement que l'on changera de porte

• Si on a choisi la bonne porte dans la première phase, on perd (puisqu'on en change).

• Si on n'a pas choisi la bonne porte dans la première phase, on gagne : en effet, on n'a pas choisi la bonne porte donc, dans les deux portes « libres », il y a la bonne et une mauvaise, donc le présentateur du jeu découvre forcément la mauvaise (puisqu'il y a le lot derrière la bonne) et comme on change, on prend la bonne.



La probabilité de gagner est donc $\frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$.

C. Conclusion

Contre-intuitivement, il faut donc changer de porte pour doubler la probabilité de gagner.

Exercices bilan p. 290

83. Avec des éléphants

1. a) $p_B(N) = \frac{17}{101}$

b) $p_{\overline{N}}(B) = \frac{84}{168} = 0,5$

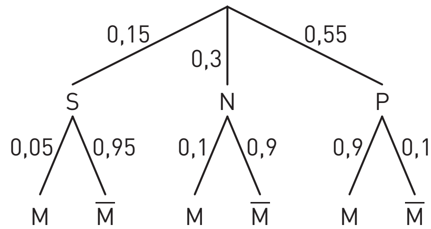
c) $p_{B \cup M}(N) = \frac{17+8}{101+32} = \frac{25}{133}$

2. $p_M(N) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $p(N) = \frac{56}{224} = \frac{1}{4}$, donc $p_M(N) = p(N)$: les événements N et M sont indépendants.

3. $p_B(N) = \frac{17}{101}$ et $p(N) = \frac{56}{224} = \frac{1}{4}$, donc $p_B(N) \uparrow p(N)$: les événements N et B ne sont pas indépendants.

84. Poisson frais

1.



2. a) $p(P \cap M) = p(P) \times p_P(M) = 0,55 \times 0,9 = 0,495$

et $p(M) = p(S) \times p_S(M) + p(N) \times p_N(M) + p(P) \times p_P(M)$

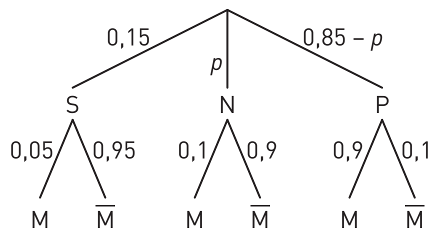
$= 0,15 \times 0,05 + 0,3 \times 0,1 + 0,55 \times 0,9 = 0,5325$.

b) $p(M) = 0,5325$ et $p_S(M) = 0,05$, donc $p(M) \uparrow p_S(M)$: les événements M et S ne sont pas indépendants.

c) $p_M(S) = \frac{p(M \cap S)}{p(M)} = \frac{0,15 \times 0,05}{0,5325} \approx 0,014$

3. Soit p la proportion de poisson venant du grossiste normand.

On a alors :



Puis $p(M) = 0,15 \times 0,05 + p \times 0,1 + (0,85 - p) \times 0,9$

$= 0,7725 - 0,8p$.

Il s'agit donc de résoudre $0,7725 - 0,8p = 0,3$

$\Leftrightarrow -0,8p = -0,4725 \Leftrightarrow p = \frac{-0,4725}{-0,8} = 0,590625$.

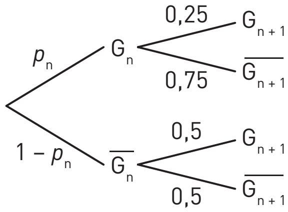
Il doit donc commander environ 59 % de son poisson chez le grossiste normand et environ 26 % chez celui de Paris.

85. Probabilités et suites

1. $p_2 = p(G_2) = p(G_1) \times p_{G_1}(G_2) + p(\overline{G_1}) \times p_{\overline{G_1}}(G_2)$

$$= 0,25 \times 0,25 + 0,75 \times 0,5 = \frac{7}{16}$$

2.



3. $p_{n+1} = p(G_{n+1}) = p(G_n) \times p_{G_n}(G_{n+1}) + p(\overline{G_n}) \times p_{\overline{G_n}}(G_{n+1})$
$= p_n \times 0{,}25 + (1-p_n) \times 0{,}5 = 0{,}25p_n + 0{,}5 - 0{,}5p_n$
$= -0{,}25p_n + 0{,}5$

4. a) $u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}4 = -0{,}25p_n + 0{,}5 - 0{,}4$
$= -0{,}25p_n + 0{,}1 = -0{,}25(u_n + 0{,}4) + 0{,}1$
$= -0{,}25u_n - 0{,}1 + 0{,}1 = -0{,}25u_n$

Ainsi, la suite (u_n) est géométrique de raison $q = -0{,}25$ et de premier terme :
$u_1 = p_1 - 0{,}4 = 0{,}25 - 0{,}4 = -0{,}15$.

b) D'après la question précédente,
$u_n = u_1 \times q^{n-1} = -0{,}15 \times (-0{,}25)^{n-1}$.

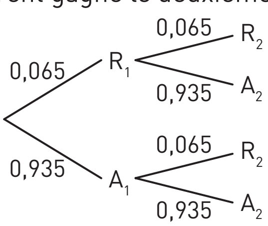
On en déduit que $p_n = u_n + 0{,}4 = 0{,}4 - 0{,}15 \times (-0{,}25)^{n-1}$.

c) La suite (p_n) semble converger vers 0,4. Cela veut dire que, quand on commence à jouer, la probabilité que l'on gagne une partie éloignée est proche de 0,4.

86. Tirages avec remise

1. Les tirages sont avec remise, donc on peut considérer que c'est une succession de deux épreuves indépendantes.

2. On considère les événements :
- R_1 : « un professeur gagne le premier lot » ;
- A_1 : « un parent gagne le premier lot » ;
- R_2 : « un professeur gagne le deuxième lot » ;
- A_2 : « un parent gagne le deuxième lot ».



1er lot / 2e lot	Professeur	Parent
Professeur	$0{,}065 \times 0{,}065$ $= 0{,}004225$	$0{,}935 \times 0{,}065$ $= 0{,}060775$
Parent	$0{,}065 \times 0{,}935$ $= 0{,}060775$	$0{,}935 \times 0{,}935$ $= 0{,}874225$

3. • La probabilité que les deux lots soient gagnés par des parents est 0,874225.

• La probabilité que les deux lots soient gagnés par des professeurs est 0,004225.

• La probabilité qu'un des deux lots soit gagné par un parent et l'autre par un professeur est $2 \times 0{,}060775 = 0{,}12155$.

Exercices d'approfondissement p. 291

87. Indépendance et contraire

1. a) $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$ où $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont disjoints, donc $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$
$\Leftrightarrow p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B)$.

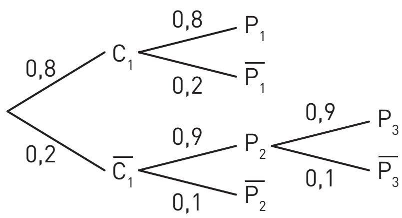
b) Comme A et B sont indépendants,
$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$, donc $p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B)$
$= p(B) - p(A) \times p(B) = (1 - p(A)) \times p(B) = p(\overline{A}) \times p(B)$.

c) De $p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A}) \times p(B)$, on peut déduire que $\overline{A}$ et B sont indépendants.

2. En appliquant la propriété précédente à :
- $\overline{A}$ et B, on déduit que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants ;
- B et A, on déduit que $\overline{B}$ et A sont indépendants.

88. Un ou deux ponts

1. On considère les événements :
- C_1 : « Bruce prend le 1er chemin » ;
- P_1 : « le pont 1 est ouvert » ;
- P_2 : « le pont 2 est ouvert » ;
- P_3 : « le pont 3 est ouvert ».



2. La probabilité qu'il soit bloqué par un pont est $0{,}8 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}9 \times 0{,}1 + 0{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}198$.

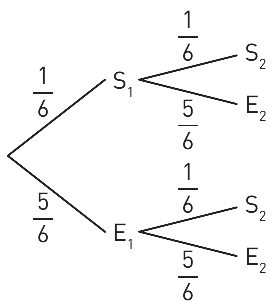
3. Soit B l'événement « Bruce est bloqué par un pont ».

On cherche $p_B(C_1) = \dfrac{p(B \cap C_1)}{p(B)} = \dfrac{0{,}8 \times 0{,}2}{0{,}198} \approx 0{,}81$.

Vers la T$^{\text{le}}$

89. 1. a) On considère les événements :

- S_1 : « le premier lancer donne un succès » ;
- E_1 : « le premier lancer donne un échec » ;
- S_2 : « le deuxième lancer donne un succès » ;
- E_2 : « le deuxième lancer donne un échec ».

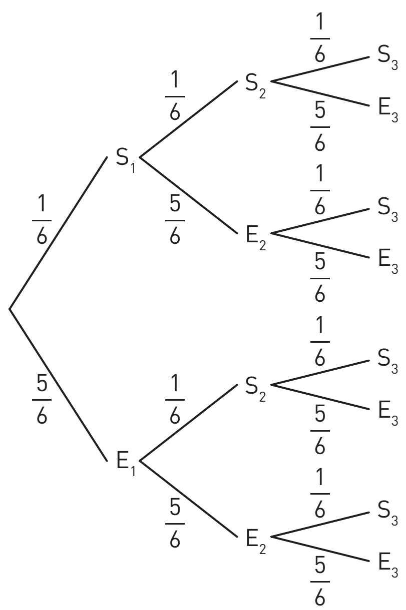


b)

Nombre de succès	0	1	2
Probabilité	$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}$ $=\frac{25}{36}$	$2\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$ $=\frac{10}{36}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$ $=\frac{1}{36}$

2. a) On considère les événements :

- S_1 : « le premier lancer donne un succès » ;
- E_1 : « le premier lancer donne un échec » ;
- S_2 : « le deuxième lancer donne un succès » ;
- E_2 : « le deuxième lancer donne un échec » ;
- S_3 : « le troisième lancer donne un succès » ;
- E_3 : « le troisième lancer donne un échec ».



b)

Nombre de succès	0	1
Probabilité	$\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$	$3\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{75}{216}$

Nombre de succès	2	3
Probabilité	$3\times\frac{5}{6}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{15}{216}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$

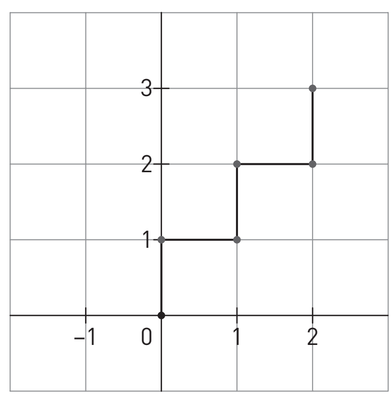
3. a) L'arbre aurait $2^{10}=1024$ chemins.

b) Il y a trois pondérations $\frac{1}{6}$ dessus.

c) Il y aurait également 7 échecs, donc 7 pondérations $\frac{5}{6}$, donc la probabilité associée à ce chemin est $\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left(\frac{5}{6}\right)^7$.

d) La probabilité d'obtenir 3 succès sur 10 est donc $\binom{10}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left(\frac{5}{6}\right)^7$.

90. 1.



Le robot s'arrête car $y=3>2$.

2. et **3.**

```
import random
def trajet():
    x=[0]
    y=[0]
    a=[0]
    n=0#nombre de déplacements
    while x[n]<=2 and x[n]>=-2 and y[n]<=2 and y[n]>=-2:
        alea=random.randint(1,4)
        a.append(alea)
        if alea == 1:
            x.append(x[n]+1)
            y.append(y[n])
        if alea == 2:
            x.append(x[n]-1)
            y.append(y[n])
        if alea == 3:
            x.append(x[n])
            y.append(y[n]+1)
        if alea == 4:
            x.append(x[n])
            y.append(y[n]-1)
        n=n+1
    return n

s=0
for i in range(100):
    s=s+trajet()
print("Il y a en moyenne",s/100,"déplacements.")
```

Travaux pratiques

p. 292-293

TP 1. Parabole et méthode de Monte-Carlo

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Estimer l'aire sous une courbe avec la méthode de Monte-Carlo.

1. On admet que la probabilité est proportionnelle à l'aire colorée.

a) $\frac{1}{2} = 0{,}5$ **b)** $\frac{2}{5} = 0{,}5$

c) $\dfrac{\frac{1\times 4}{2}+8+\frac{2\times 4}{2}}{25} = \frac{14}{25} = 0{,}56$

2. a) L'aire en bleu est inférieure à $\frac{1\times 2}{2}+\frac{(1+5)\times 3}{2}$ = 10 carreaux donc la probabilité cherchée est inférieure à $\frac{10}{25} = 0{,}4$.

b)

```
import random
def domaine():
    x = random.random()
    y = random.random()
    if y < x**2:
        reponse = True
    else:
        reponse = False
    return reponse
```

c)

```
eff_dessous=0
eff_dessus=0
for i in range(10000):
    if domaine() == True:
        eff_dessous=eff_dessous+1
    else:
        eff_dessus=eff_dessus+1
print(eff_dessous/(eff_dessous+eff_dessus))
```

d) On trouve des valeurs autour de 0,33.

e) On peut écrire `range(1000000)` ou `range(10000000)` pour affiner l'estimation.

TP 2. Tirages (presque) indépendants ?

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Comprendre pourquoi, dans une grande population, on peut assimiler un tirage sans remise avec un tirage avec remise.

A. 1. 70 %

2. a) • Si la première personne tirée au sort joue aux jeux vidéos, il reste 6 personnes sur 9 jouant aux jeux vidéos, soit une probabilité d'environ 0,6667.

• Si la première personne tirée au sort ne joue pas aux jeux vidéos, il reste 7 personnes sur 9 jouant aux jeux vidéos, soit une probabilité d'environ 0,7778.

b) Non puisque le résultat du premier tirage a de l'influence sur le deuxième tirage. S'il y avait indépendance, on aurait dû trouver la même probabilité dans les deux cas.

3. Il y a 70 % de personnes jouant aux jeux vidéos dans cette population.

• Si la première personne tirée au sort joue aux jeux vidéos, il reste 699 personnes sur 999 jouant aux jeux vidéos, soit une probabilité d'environ 0,6997.

• Si la première personne tirée au sort ne joue pas aux jeux vidéos, il reste 700 personnes sur 999 jouant aux jeux vidéos, soit une probabilité d'environ 0,7007.

On constate que le résultat du premier tirage a de l'influence sur le deuxième tirage. Cependant, les proportions, et donc les probabilités que la deuxième personne tirée au sort joue aux jeux vidéos, sont très proches de 0,70, c'est-à-dire ce que l'on obtiendrait si les tirages étaient indépendants.

B. 1. a) $50 \times \dfrac{70}{100} = 35$, donc il y a 35 personnes jouant aux jeux vidéos dans cet échantillon.

b) Dans la suite, on prend 48 comme résultat.

c) Par exemple en arrondissant p à 10^{-3} :

	Au départ	Après 1 tirage	Après 2 tirages	Après 3 tirages	Après 4 tirages	Après 5 tirages
Joue aux jeux vidéos	35	35	34	33	32	32
Ne joue pas aux jeux vidéos	15	14	14	14	14	13
p	0,7	≈ 0,714	≈ 0,708	≈ 0,702	≈ 0,696	≈ 0,711

d) • Dans cet exemple, on peut considérer que la personne tirée au sort joue aux jeux vidéos si on obtient un résultat entre 1 et 35.

• Dans la suite, on prend 11 comme résultat.

e) • On génère un entier aléatoire entre 1 et 48 et on considère que la personne joue aux jeux vidéos si le résultat est entre 1 et 34 (par rapport à notre exemple précédentS.
Dans la suite, on considère que la valeur obtenue est 18.

• On génère un entier aléatoire entre 1 et 47 et on considère que la personne joue aux jeux vidéos si le résultat est entre 1 et 33 (par rapport à notre exemple précédent). Dans la suite, on considère que la valeur obtenue est 1.

• On génère un entier aléatoire entre 1 et 46 et on considère que la personne joue aux jeux vidéos si le résultat est entre 1 et 32 (par rapport à notre exemple précédent). Dans la suite, on considère que la valeur obtenue est 44.

2. Selon le même principe en arrondissant p à 10^{-3} :

	Au départ	Après 1 tirage	Après 2 tirages	Après 3 tirages	Après 4 tirages	Après 5 tirages
Joue aux jeux vidéos	7 000	6 999	6 998	6 998	6 998	6 997
Ne joue pas aux jeux vidéos	3 000	3 000	3 000	2 999	2 998	2 998
p	0,7	≈ 0,7	≈ 0,7	≈ 0,7	≈ 0,7	≈ 0,7

3. a) Voir le programme à télécharger.

b) Quand n est grand, l'amplitude de p est réduite.

En lançant une simulation avec :

• $n = 50$, l'auteur de ce chapitre a obtenu des valeurs de p entre 0,61 et 0,72 ;

• $n = 1000$, l'auteur de ce chapitre a obtenu des valeurs de p entre 0,699 et 0,703 ;

• $n = 10\,000$, l'auteur de ce chapitre a obtenu des valeurs de p entre 0,69982 et 0,70002.

4. Si le tirage était avec remise, la proportion de personnes jouant au jeux vidéos dans la population serait toujours de 0,7. On a remarqué dans ce TP que, lorsque la population est grande, cette proportion de personnes jouant aux jeux vidéos dans la population reste très proche de 0,7 même si le tirage est sans remise : on peut donc considérer que ce tirage sans remise est assimilable à un tirage avec remise.

En autonomie p. 294-295

Calculer des probabilités conditionnelles sans arbre

91. **b**

92. **b**

93. $p_C(D) = \dfrac{p(C \cap D)}{p(C)} = \dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{5}$

94. $p_F(E)=\dfrac{p(E\cap F)}{p(F)}$, donc $p(F)=\dfrac{p(E\cap F)}{p_F(E)}=\dfrac{0{,}35}{0{,}7}=0{,}5$.

95. On considère les événements :

• I : « Yannis part en vacances à Istanbul » ;

• P : « il pleut pendant les vacances de Yannis ».

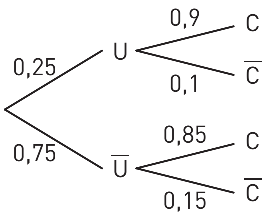
D'après l'énoncé, $p(I)=0{,}9$ et $p_I(\overline{P})=0{,}85$.

On cherche $p(I\cap\overline{P})=p(I)\times p_I(\overline{P})=0{,}9\times0{,}85=0{,}765$.

Construire et utiliser un arbre pondéré

96. b **97. c** **98. a**

99. 1.

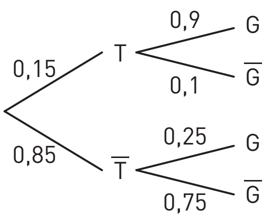


2. $p(U\cap C)=p(U)\times p_U(C)=0{,}25\times0{,}9=0{,}225$ et

$p(\overline{U}\cap C)=p(\overline{U})\times p_{\overline{U}}(C)=0{,}75\times0{,}85=0{,}6375$.

3. $p(C)=p(U\cap C)+p(\overline{U}\cap C)=0{,}225+0{,}6375=0{,}8625$

100. 1.



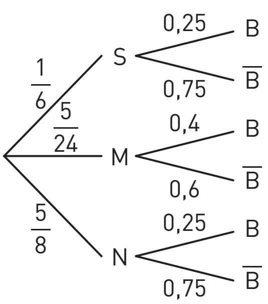
2. $p(\overline{G})=p(T)\times p_T(\overline{G})+p(\overline{T})\times p_{\overline{T}}(\overline{G})$

$=0{,}15\times0{,}1+0{,}85\times0{,}75=0{,}6525$

Inverser un conditionnement

101. b

102. 1.



2. $p(S\cap B)=p(S)\times p_S(B)=\dfrac{1}{6}\times0{,}25=\dfrac{1}{24}$ et

$p(B)=p(S)\times p_S(B)+p(M)\times p_M(B)+p(N)\times p_N(B)$

$=\dfrac{1}{6}\times0{,}25+\dfrac{5}{24}\times0{,}4+\dfrac{5}{8}\times0{,}25=0{,}28125$.

3. On cherche $p_B(S)=\dfrac{p(S\cap B)}{p(B)}=\dfrac{\frac{1}{24}}{0{,}28125}\approx0{,}148$.

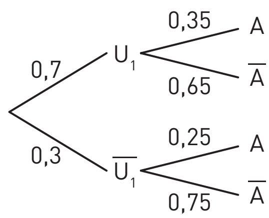
4. • On sait déjà que $p_B(S)\approx0{,}148$.

• $p_B(M)=\dfrac{p(M\cap B)}{p(B)}=\dfrac{\frac{5}{24}\times0{,}4}{0{,}28125}\approx0{,}296$

• $p_B(N)=\dfrac{p(N\cap B)}{p(B)}=\dfrac{\frac{5}{8}\times0{,}25}{0{,}28125}\approx0{,}556$

Le plus probable est donc que le jeu fonctionne sur la console N.

103.



• $p(A)=0{,}7\times0{,}35+0{,}3\times0{,}25=0{,}32$

• $p_A(U_1)=\dfrac{p(A\cap U_1)}{p(A)}=\dfrac{0{,}7\times0{,}35}{0{,}32}\approx0{,}766$

Utiliser l'indépendance

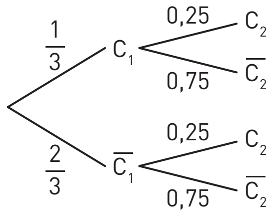
104. a

105. 1. Il répond au hasard pour chacune des questions, donc on peut penser que la réponse à la première question n'a pas d'influence sur la réponse à la deuxième.

2. On considère les événements :

• C_1 : « la première réponse est correcte » ;

• C_2 : « la deuxième réponse est correcte ».



1re réponse / 2e réponse	Correcte	Incorrecte
Correcte	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$
Incorrecte	$\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$	$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

3. La probabilité qu'il ait une réponse correcte est $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$.

106. 1. $p(D) = 0,1 \times 0,23 + 0,2 \times 0,44 + 0,7 \times 0,17 = 0,23$ $= p_A(D)$, donc A et D sont indépendants.

2. $p(D) = 0,23 \uparrow p_B(D)$, donc B et D ne sont pas indépendants.

107. A et B sont indépendants si, et seulement si, $p(B) = p_A(B)$, or :

- $p_A(B) = 0,8$;
- $p(B) = 0,4 \times 0,8 + 0,6 \times p = 0,6p + 0,32$.

Il s'agit donc de résoudre :

$$0,6p + 0,32 = 0,8 \Leftrightarrow 0,6p = 0,48 \Leftrightarrow p = \frac{0,48}{0,6} = 0,8$$

CHAPITRE 11 Variables aléatoires réelles

Manuel p. 296-327

I. Introduction

Objectifs du chapitre

Ce chapitre introduit la notion de variable aléatoire réelle discrète. Le calcul des probabilités traité en Seconde et en Première, à l'aide de modèles, d'arbres ou de tableaux sera utilisé pour déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire et ce chapitre sera donc l'occasion de retravailler certaines méthodes. Les indicateurs, espérance, variance et écart-type, d'une variable aléatoire sont définis et utilisés pour analyser des situations montrant des applications concrètes des probabilités.

Ce chapitre sera aussi l'occasion de poursuivre le travail engagé en Seconde sur les simulations, notamment à travers des situations que l'on peut modéliser avec des variables aléatoires.

L'étude des variables aléatoires sera poursuivi en Terminale Spécialité ou en option Maths Complémentaires.

Capacités

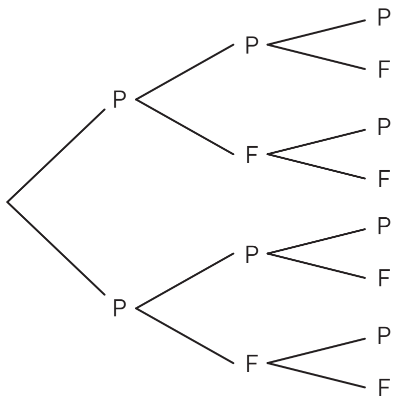
- → **Modéliser une situation par une variable aléatoire et définir une loi de probabilité**
- → **Interpréter et utiliser les notations du type $\{X = a\}$, $\{X < a\}$, $p(X = a)$, $p(X < a)$**
- → **Calculer, interpréter et utiliser l'espérance d'une variable aléatoire**
- → **Calculer et interpréter la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire**
- → **Simuler une variable aléatoire**

II. Corrigés des activités et des exercices

Pour prendre un bon départ p. 269

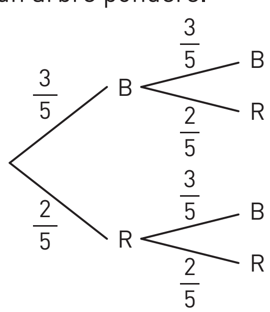
1. Calculer une probabilité avec un arbre de dénombrement

À l'aide de l'arbre de dénombrement ci-dessous, la probabilité de faire 2 Pile sur les trois lancers est $\frac{3}{8}$.



2. Calculer une probabilité avec un arbre pondéré

On construit un arbre pondéré.



La probabilité d'avoir deux boules bleues est donc $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

3. Calculer une probabilité avec un tableau

a) $\frac{2}{35}$

b) $\frac{30}{35} = \frac{6}{7}$

4. Calculer et interpréter des moyennes et des écarts-types

1. Pour Diego : $\bar{x} \approx 15{,}2$ et $\sigma \approx 1{,}69$.

Pour Nesrine : $\bar{x} \approx 15{,}4$ et $\sigma \approx 1{,}37$.

2. Leurs réussites sont en moyenne similaires. L'écart-type étant plus petit pour Nesrine, elle est plus régulière.

5. Simuler une expérience à deux issues

```
Si Alea()<=0.05
   Afficher "est traité contre le diabète"
Sinon
   Afficher "n'est pas traité contre
   le diabète"
Fin si
```

Activités p. 298-301

Activité 1. Découvrir la notion de variable aléatoire

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** introduire la notion de variable aléatoire.

1. 28 ; 13 ; 2 ; –2

2. Dame de pique reliée à 13 euros.

As de cœur relié à 28 euros.

3 de pique relié à 2 euros et 10 de cœur et 8 de pique relié à –2 euros.

3. $X(\{6 de cœur\}) = -2$ et $X(\{roi de trefle\}) = 13$.

4. a) $p(X = 28) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$

b) $p(X = 13) = \dfrac{8}{52} = \dfrac{2}{13}$

5.

Gains x_i	28	13	2	–2
Probabilités $p(X = x_i)$	$\dfrac{1}{13}$	$\dfrac{2}{13}$	$\dfrac{3}{13}$	$\dfrac{7}{13}$

car $p(X = 2)$ est la probabilité d'obtenir un 2, un 3 ou un 4 : $\dfrac{12}{52} = \dfrac{3}{13}$ et on pourra remarquer que la somme de toutes les probabilités est égale à 1.

6. a) $\dfrac{7}{13}$ **b)** $\dfrac{3}{13}$

c) 0 **d)** $\dfrac{3}{13}$

Activité 2. Utiliser des notations

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** comprendre et utiliser les notations liées aux variable aléatoire du type $\{X = a\}$, $p(X \leqslant a)$ ... déjà aperçues dans l'activité 1 pour $p(X = 28)$ par exemple.

1. 10 ; 15 ; 20 ; 22 ; 30 ; 31 ; 40 ; 50.

2. a) {10 ; 15 ; 20 ; 22}.

b) Le numéro du ticket tiré est inférieur ou égal à 25.

3. a) {10 ; 15 ; 20 ; 22 ; 30}.

Le numéro du ticket tiré est inférieur à 31.

b) {22 ; 30 ; 31 ; 40 ; 50}.

Le numéro du ticket tiré est supérieur ou égal à 22.

c) {15}.

Le numéro du ticket tiré est égal à 15.

4. $p(X \leqslant 15) = \dfrac{16}{50} = \dfrac{8}{25}$.

5. a) $p(X = 15) = \dfrac{14}{50} = \dfrac{7}{25}$.

b) $p(X < 31) = \dfrac{35}{50} = \dfrac{7}{10}$.

c) $p(X \geqslant 22) = \dfrac{26}{50} = \dfrac{13}{25}$.

Activité 3. Découvrir la notion d'espérance

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** introduction de la notion d'espérance. Cette activité nécessite aussi de créer une simulation sur tableur.

1. Saisir en A5 et B5 : `=alea.entre.bornes(1;6)`

Saisir en C5 : `=max(A5:B5)-min(A5:B5)-1`

2. D'après la simulation proposée, elle peut espérer gagner en moyenne 0,939 euros par partie.

3. X peut prendre les valeurs –1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4.

Pour obtenir les probabilités on peut créer un tableau à double entrée donnant les gains algébriques :

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	−1	0	1	2	3	4
2	0	−1	0	1	2	3
3	1	0	−1	0	1	2
4	2	1	0	−1	0	1
5	3	2	1	0	−1	0
6	4	3	2	1	0	−1

Ce qui donne :

x_i	−1	0	1
$p(X = x_i)$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$	$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

x_i	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$	$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

4.

$$E(X) = (-1) \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{5}{18} + \ldots + 4 \times \frac{1}{18} = \frac{34}{36} = \frac{17}{18} \approx 0{,}944$$

5. La moyenne observée est très proche de l'espérance, de même que pour les autres simulations effectuées sur le tableur.

Activité 4. Comparer à l'aide de l'écart-type

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** introduire les définitions de la variance et de l'écart-type d'une variable aléatoire. On s'appuie sur le travail sur les statistiques en Seconde.

1. On pourra se référer au TP1 p. 320 du manuel si besoin quant à l'utilisation de la calculatrice.

2. a) Le jeu A car le gain moyen est supérieur.

b) Le jeu B car l'écart-type est le plus grand)

c) Le jeu B.

3. a)

Pour le jeu A :

x_i	−4	0	2	10
$p(X = x_i)$	0,25	0,26	0,3	0,19

Pour le jeu B :

y_i	−10	0	5	200
$p(Y = y_i)$	0,4	0,4	0,18	0,02

b) $E(X) = 1{,}5$ et $E(Y) = 0{,}9$.

c) $\sigma(X) \approx 4{,}685$ et $\sigma(Y) \approx 29{,}046$.

d) $V(Y) = (\sigma(Y))^2 \approx 843{,}69$ avec le résultat du tableur.

$V(Y) = 0{,}40 \times (-10 - 0{,}9)^2 + 0{,}40 \times (0 - 0{,}9)^2$
$+ 0{,}18 \times (5 - 0{,}9)^2 + 0{,}02 \times (200 - 0{,}9)^2 \approx 843{,}69.$

e) en B8 : `=A3*B3+A4*B4+A5*B5+A6*B6`

en B9 : `=racine(B3*(A3-B8)^2+B4*(A4-B8)2+B5*(A5-B8)^2+B6*(A6-B8)^2)`

Activité 5. Simuler une variable aléatoire avec Python

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** créer un programme permettant d'obtenir des valeurs au hasard pour simuler une variable aléatoire.

1. La probabilité qu'elle attende 3 min est 0,2 et la probabilité qu'elle attende au plus 3 min est 0,78.

2. a) La probabilité qu'il soit inférieur ou égal à 0,35 est 0,35. La probabilité qu'il soit compris entre 0,35 et 0,58 est 0,23.

b) • La probabilité que Chloé attende 1 minute vaut 0,35, c'est-à-dire la même que la probabilité que **`aleatoire`** soit inférieur ou égal à 0,35.

• La probabilité que Chloé attende 2 minutes vaut 0,23, c'est à dire la même que la probabilité que **`aleatoire`** soit compris entre 0,35 et 0,58.

• La probabilité que Chloé attende 3 minutes vaut 0,20, c'est à dire la même que la probabilité que **`aleatoire`** soit compris entre 0,58 et 0,78.

• La probabilité que Chloé attende 4 minutes vaut 0,22, c'est à dire la même que la probabilité que **`aleatoire`** soit compris entre 0,78 et 1.

c) Il affiche 3.

3.

```
import random
aleatoire=random.random()
if aleatoire<=0.40:
    print("1")
if aleatoire<=0.92 and aleatoire>0.40:
    print("2")
if aleatoire<=0.96 and aleatoire>0.92:
    print("3")
if aleatoire<=0.99 and aleatoire>0.96:
    print("4")
if aleatoire>0.99:
    print("5")
```

À vous de jouer p. 305-307

1. X peut prendre les valeurs -3, 2, 4 et 6 :

x_i	-3	2	4	6
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. Soit Y la variable aléatoire donnant le gain algébrique après un tirage.

Y peut prendre les valeurs 100 ; 50 ; 20 ; -100

On a :

x_i	100	50	20	-100
$p(X = x_i)$	$\frac{10}{80} = \frac{1}{8}$	$\frac{10}{80} = \frac{1}{8}$	$\frac{12}{80} = \frac{3}{20}$	$\frac{48}{80} = \frac{3}{5}$

3. 1. $\{X = 20\}$: « Le gain est égal à 20 euros ». $\{X \leqslant 50\}$: « Le gain est inférieur ou égal à 50 ».

2. $p(X \leqslant 50) = p(X = 2) + p(X = 20) = \frac{2}{5}$.

3. $p(X \geqslant 100)$.

4. 1. 0,1

2. 0,52

3. 0,18

5. 1. a) Il y a 9 pièces défectueuses dans le lot de 100 pièces.

b) Il y a moins de 5 pièces défectueuses dans le lot de 100 pièces (c'est-à-dire un nombre inférieur ou égal à 4).

2. $p(Y > 2)$: la probabilité qu'il y ait plus de deux pièces défectueuses dans le lot de 100 pièces.

$p(Y = 0)$: la probabilité qu'il n'y ait aucune pièce défectueuse dans le lot de 100 pièces.

6. 1. 0 ; 5 ; 12 ou 17.

2. Le coût de réparation est inférieur ou égal à 10 euros.

3. $\frac{28}{1000} = \frac{7}{250} = 0{,}028$.

7. On a :

x_i	-4	-3	6	16
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E(X) = \frac{1}{4} \times (-4) + \frac{1}{4} \times (-3) + \frac{1}{4} \times 6 + \frac{1}{4} \times 16 = 3{,}75$,

c'est ce que l'on peut espérer gagner en moyenne sur un grand nombre de parties.

8. En s'aidant d'un arbre de dénombrement, on obtient :

x_i	-3	-1	1	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Alors $E(X) = (-3) \times \frac{1}{8} + \ldots + 3 \times \frac{1}{8} = 0$ donc le jeu est équitable.

9.

```
import random
m=random.random()
if m<=0.58:
    print("-8")
else:
    print("15")
```

10. $p(Y = -5) = 0{,}82$.

Exercices d'application p. 308-310

Apprendre à apprendre

11. Elles le sont toutes mais peut-être plus particulièrement celle de $E(X)$.

12. • Construire des arbres pondérés

• Calculer des probabilités en utilisant des arbres (de dénombrement ou pondéré).

Questions – Flash

13. Y peut prendre toutes les valeurs entières de 3 à 12.

14. X peut prendre les valeurs -2 (quand on tire deux boules rouges) ; 2 (une boule jaune et une boule rouge) et 6 (deux boules jaunes).

15. a) $\{X \leqslant 6\}$

b) $p(X > 14)$

16. $p(X > 12) = 1 - p(X \leqslant 12) = 1 - 0{,}23 = 0{,}77$

17. $p(X = 8) = 0{,}45$ (la probabilité d'obtenir un nombre entre 0,2 et 0,65).

18. 0,4 pour que la somme de toutes les probabilités soit égale à 1.

19. $p(X \leqslant 5) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}6$

20. $E(X) = 0{,}1 \times 0 + 0{,}2 \times 2 + 0{,}3 \times 5 + 0{,}4 \times 10 = 5{,}9$

Déterminer une loi de probabilité

21. 1. X peut prendre les valeurs 2, 10 et 50.

2.

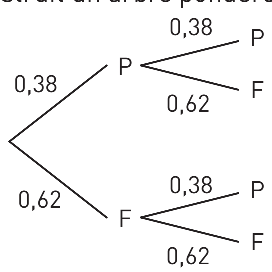
x_i	2	10	50
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

22. 1. Y peut prendre les valeurs 1600 ; 2 000 ; 2 500 ou 3 000.

2. On a :

y_i	1 600	2 000	2 500	3 000
$p(Y = y_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{1}{100}$

23. 1. On construit un arbre pondéré :



$p(X = 30)$ est la probabilité d'obtenir 2 Pile :

$p(X = 30) = 0{,}38 \times 0{,}38 = 0{,}144\,4$.

2. En calculant les probabilités grâce à l'arbre, on trouve :

x_i	30	5	-20
$p(X = x_i)$	0,1444	0,4712	0,3844

24. On a :

n_i	1	2	4	5	6
$p(N = n_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$

25. En faisant un arbre de dénombrement ou un tableau à double entrée, on obtient :

x_i	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

Utiliser les notations d'évènements et de probabilités

26. a) X est égale à 150 : {150}

b) X est égale à 10 : pas d'issue

c) X est supérieure à 100 : {150 ; 300 ; 1 000}

d) X est supérieure à 300 : {1 000}

e) X est supérieure ou égale à 300 : {300 ; 1 000}

f) X est inférieure ou égale à 0 : {– 120 ; 0}

27. a) $p(Y = 6)$ **b)** $p(Y \geqslant 1)$

c) $p(Y \leqslant 3)$ **d)** $p(Y > 10)$

28. a) 0,45 **b)** 0,86 **c)** 0,14

d) 0,90 **e)** 0,1 **f)** 0,31

29. 1. $\{X \leqslant 4\}$

2. $p(X \leqslant 6) = 0{,}13$

3. $p(X \geqslant 1) = 0{,}97$

30. 1.

x_i	-1	0	1
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

2. $p(X \geqslant 0) = \frac{2}{5}$

Calculer et utiliser une espérance

31. 1. $E(X) = -2 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 11 \times \frac{1}{4} = 2$

2. On retrouve le résultat.

32. 1. $E(X) = -1,6$

2. Sur un grand nombre de parties, on perd en moyenne à ce jeu 1,6 euro par partie.

3. Non car $E(X) \neq 0$.

33. Remarque : suite à la publication des projets de programmes en spécialité Terminale, ce type d'exercice n'est pas une capacité attendue en spécialité Première.

1. Y peut prendre les valeurs : -9 ; 12 ; 30 ; 90.

Z peut prendre les valeurs : 7 ; 14 ; 20 ; 40.

2. $E(Y) = E(3X) = 3E(X) = 15$

$E(Z) = E(X + 10) = E(X) + 10 = 15$

Calculer des indicateurs

34. 1. $E(X) = -2 \times \frac{3}{10} + \ldots + 6 \times \frac{4}{10} = 3$

2. $V(X) = \frac{3}{10}(-2-3)^2 + \ldots + \frac{4}{10}(6-3)^2 = 11,4$

$\sigma(X) = \sqrt{11,4} \approx 3,38$

3. On retrouve les résultats (voir le TP1 p. 320 du manuel, par exemple pour l'utilisation de la calculatrice).

35. 1. $E(X) = 2,3$, $V(X) = 81,41$ et $\sigma(X) = \sqrt{81,41} \approx 9,02$

2. $E(Y) = \frac{38}{3} \approx 12,67$

$V(Y) = \frac{18512}{9} \approx 2056,89$

$\sigma(Y) = \sqrt{2056,89} \approx 45,35$

3. $E(Z) = -1$, $V(Z) = 16,9$ et $\sigma(Z) = \sqrt{16,9} \approx 4,11$

36. 1. $E(X) = 5$ et $E(Y) = 5$: les espérances sont égales.

2. $\sigma(X) \approx 10,34$ et $\sigma(Y) \approx 12,04$.

L'écart-type de Y est légèrement supérieur à celui de X.

Simuler une variable aléatoire

37. 1.

y_i	0	5	20
bornes pour alea()	entre 0 et 0,80 inclus	entre 0,80 exclu et 0,92 inclus	entre 0,92 exclu et 1

2.

```
aleat←alea()
Si aleat<=0,8
   Afficher "0"
Fin si
Si aleat<=0,92 et aleat>0,8
   Afficher "5"
Fin si
Si aleat>0,92
   Afficher "20"
Fin si
```

38. 1.

```
aleatoire←alea()
Si aleatoire<=0,56
   Afficher "-5"
Fin si
Si aleatoire>0,56 et aleatoire<=0,83
   Afficher "1"
Fin si
Si aleatoire>0,83
   Afficher "10"
Fin si
```

2.

```
import random
aleatoire=random.random()
if aleatoire<=0.56:
   print("-5")
if aleatoire<=0.83 and aleatoire>0.56:
   print("1")
if aleatoire>0.83:
   print("10")
```

39. 1. 0,3

2.

x_i	−4	0	2	15
$p(X = x_i)$	0,15	0,15	0,3	0,4

40.

x_i	−8	50	80
$p(X = x_i)$	0,72	0,23	0,05

41.

1. 0,44

2. 0,61

3. 0,62

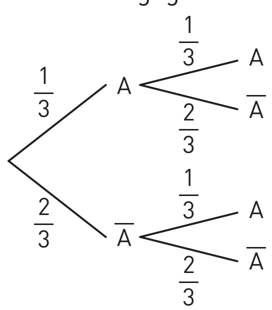
42.

$E(X) = 1$.

Exercices d'entraînement p. 278-279

Loi de probabilité et calcul

43. 1. Soit A : « Léonard gagne 8 euros »



X donnant le gain algébrique, on a :

$p(X = 11) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

$p(X = 3) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

$p(X = -5) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

2. $P(X \geqslant 0) = \frac{5}{9}$

44. Par déduction on obtient :

x_i	0	1	2	3	4	5
$p(X = x_i)$	0,25	0,10	0,35	0,20	0,05	0,05

45. 1. Soit A : « Miguel rencontre un ami devant une salle ».

En comptant les 5 minutes, on a :

$p(X = 9) = 0,3 \times 0,3 = 0,09$ (s'il voit deux amis).

$p(X = 7) = 2 \times 0,3 \times 0,7 = 0,49$ (s'il voit un ami).

$p(X = 5) = 0,7 \times 0,7 = 0,49$ (s'il ne voit personne).

46. 1. $P(X = 252) = \frac{2}{200} = 0,01$

2. $P(X \leqslant 250) = \frac{194}{200} = 0,97$

47. 1. On a :

x_i	3	5	−2
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{n}$	$\frac{n-7}{n}$	$\frac{5}{n}$

2. Il faut que $p(X \geqslant 0) \geqslant 0,6$ soit $\frac{n-5}{n} \geqslant 0,6$.

Il faut prendre $n \geqslant 13$.

48. On peut dresser le tableau d'effectifs suivant.

	Judo	Danse Hip-Hop	Hand-ball	Total
Adultes	24	8	16	48
Jeunes	32	36	40	108
Total	56	44	56	156

1. $P(X = 13) = \frac{40}{156} = \frac{10}{39}$

$P(X \geqslant 20) = \frac{74}{156} = \frac{37}{78}$

2. On obtient :

x_i	13	15	20	26
$p(X = x_i)$	$\frac{40}{156}$	$\frac{44}{156}$	$\frac{48}{156}$	$\frac{24}{156}$

Indicateurs d'une variable aléatoire et problèmes

49. 1. On obtient :

x_i	5	20	−4
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$

2. $E(X) = 3{,}5$

$V(X) = 83{,}25$

$\sigma(X) \approx 9{,}12$

3. Sur un grand nombre de parties, on peut espérer gagner en moyenne 3,50 euros par partie.

4. Se référer au TP1 page 320 du manuel de l'élève par exemple pour l'utilisation de la calculatrice.

50. 1. Grâce à un arbre pondéré, on obtient :

x_i	−40	30	100
$p(X = x_i)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

2. $E(X) = -5$, $V(X) = 1837{,}5$ et $\sigma(X) \approx 42{,}87$.

3. Sur un grand nombre de parties, on peut espérer perdre en moyenne 5 euros par partie.

4. Non car $E(X) \neq 0$.

51. On peut modéliser la situation avec une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

x_i	9	7	5	3	1	−1
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Alors $E(X) = 4$: c'est le montant qu'elle peut espérer gagner par partie en moyenne à ce jeu.

52. 1.

Par exemple :

A : « William prend le trajet A »

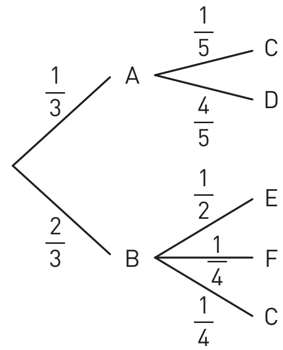
B : « William prend le trajet B »

C : « le trajet dure 10 min »

D : « le trajet dure 13 min »

E : « le trajet dure 8 min »

F : « le trajet dure 9 min ».



2. On trouve :

x_i	13	10	9	8
$p(X = x_i)$	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

3. $E(T) = \frac{299}{30} \approx 9{,}97$: c'est le temps moyen espéré pour un trajet si William fait un grand nombre de trajets.

53. On pose X la variable aléatoire donnant le gain algébrique à ce jeu.
On construit un arbre pondéré permettant d'obtenir :

x_i	11	3	−5
$p(X = x_i)$	0,09	0,42	0,49

Alors $E(X) = -0{,}2$: c'est le gain algébrique moyen par partie sur un grand nombre de parties.
On peut donc perdre 200 euros sur 1 000 parties.

54. a) $m = -10$.

b) $m = 78$.

55. En posant X la variable aléatoire donnant le gain algébrique de Constance à une partie on a :

x_i	$-m$	0	$2m$
$p(X = x_i)$	0,35	0,45	0,2

Le montant moyen qu'elle peut espérer gagner est $E(X) = 0{,}05\,m$.

56. En posant X la variable aléatoire donnant le gain algébrique à une partie et en construisant un arbre pondéré, on trouve :

x_i	$a - 5$	5	−5
$p(X = x_i)$	0,04	0,32	0,64

Pour avoir $E(X) > 0$ (Constance gagne de l'argent en moyenne à ce jeu), c'est-à-dire $0{,}04(a - 5) + 5 \times 0{,}32 - 5 \times 0{,}64 > 0$.

Il faut $a > 45$.

57. 1. a) On obtient :

x_i	-5	5	15
$p(X = x_i)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{3}{16}$

b) $E(X) = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$

c) À l'avantage du joueur.

2.

x_i	$-m$	$10 - m$	$20 - m$
$p(X = x_i)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{3}{16}$

$E(X) = 0 \Leftrightarrow m = 7{,}5$

58. Par exemple un jeu pour lequel on modéliserait le gain algébrique par la variable aléatoire de loi de probabilité donnée ci-dessous :

x_i	100	0	-20
$p(X = x_i)$	$0{,}1$	$0{,}15$	$0{,}75$

59. 1. $p(X = 10) = \frac{19}{20}$, $p(X = 14) = \frac{7}{200}$

et $p(X = 16) = \frac{3}{200}$

2. On calcule $E(X) = 10{,}23$ euros.

3. 10,23 millions.

60. 1. a) $p(X = -10) = \frac{36}{37}$ et $p(X = 350) = \frac{1}{37}$

b) $E(X) = -\frac{10}{37} \approx -0{,}27$ et $\sigma(X) \approx 58{,}37$

En moyenne, il perdra environ 27 centimes par partie. L'écart-type est plutôt grand donc les deux valeurs sont plutôt éloignées (de part et d'autre) du gain moyen.

2. a) $p(Y = -10) = \frac{19}{37}$ et $p(Y = 10) = \frac{18}{37}$

b) $E(Y) = -\frac{10}{37} \approx -0{,}27$ et $\sigma(Y) \approx 10$

En moyenne, il perdra environ 27 centimes par partie. L'écart-type n'est pas très grand et semble cohérent avec les valeurs et les probabilités.

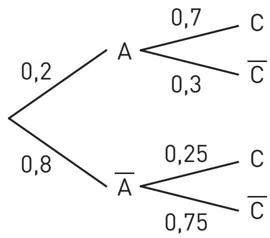
3. Non car $E(X) < 0$.

4. Plutôt de miser sur un numéro s'il aime le risque.

61. 1. a) $p(\overline{A}) = 0{,}8$ et $p(\overline{A} \cap \overline{C}) = 0{,}6$

b) $p_{\overline{A}}(\overline{C}) = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$

2.



3. a)

Bénéfice par client en euros	0	4	30	34
Probabilité d'atteindre le bénéfice	0,6	0,2	0,06	0,14

b) En moyenne, le bénéfice est de 7,36 euros par client sur un grand nombre de clients.
Pour 100 clients, il peut espérer un bénéfice de 736 euros.

62. 1. Pour la tombola A

x_i	195	95	-5
$p(X = x_i)$	$0{,}01$	$0{,}02$	$0{,}97$

Pour la tombola B

x_i	248	8	-2
$p(X = x_i)$	$0{,}0025$	$0{,}05$	$0{,}9475$

2. $E(X) = -1$ et $\sigma(X) \approx 24{,}17$

$E(Y) = -0{,}875$ et $\sigma(Y) \approx 12{,}65$

3. Les espérances ne sont pas égales (on perd en moyenne moins d'argent avec la tombola B).

L'écart-type est plus grand pour la tombola A : le jeu peut permettre des écarts de gain plus grands.

Propriétés de l'espérance

63. 1. $E(X) = 1{,}46 > 0$

2. a) Y peut prendre les valeurs -2, 6, 10 et 20.

b)

x_i	−2	6	10	20
$p(X = x_i)$	0,5	0,32	0,16	0,02

c) $E(Y) = 2E(X) = 2,92$.

64. 1. a) Z peut prendre les valeurs 42 ; 60 ; 70 et 250.

b) $E(Z) = 66$

2. a) R peut prendre les valeurs 17 ; −10 ; −25 et −295.

b) $E(R) = -19$

65. 1. $E(X) = 1\,790,5$

2. Elle augmente de 10, soit 1 800,5.

3. Augmenter de 2 %, c'est multiplier par 1,02 donc l'espérance est multipliée par 1,02, soit 1 826,31.

66. 1. 15 %

2.

r_i	7	10,20	11,30	14,50
$p(R = r_i)$	0,65	0,15	0,16	0,04

3. $E(R) = 8,468$ Donc pour 2 000 spectateurs, il peut espérer un chiffre d'affaires de 16936 euros.

4. 8,968 euros par client.

67. $E(X) = 5a$

68. 1. $E(D) = 7,75$

2. 3,875 euros en moyenne par week-end)

3. $a \leqslant \frac{2}{3}$

Variable aléatoire et programmation

69. 1.

x_i	−5	7	15
$p(X = x_i)$	0,6	0,26	0,14

2. Oui car $E(X) = 0,92$.

70. Non car on trouve que l'espérance est égale à −3,24.

71. 1.

```
import random
def age_aleatoire():
    m=random.random()
    if m<=0.026:
        age=14
    if m<=0.258 and m>0.026:
        age=15
    if m<=0.517 and m>0.258:
        age=16
    if m<=0.744 and m>0.517:
        age=17
    if m<=0.960 and m>0.744:
        age=18
    if m>0.960:
        age=19
    return age
```

2. Elle crée une liste de 10 valeurs prises par la variable aléatoire, soit une liste des âges de 10 élèves pris au hasard dans le lycée.

72. 1. `echantillon=[jeu() for i in range(100)]`

2. $p(X = 16) = 0,548$ donc c'est le premier graphique car les fréquences observées sont proches de cette valeur.

73. 1.

```
import random

m=random.random()
if m<=0.4:
     nb=0
if m<=0.5 and m>0.4:
     nb=1
if m<=0.85 and m>0.5:
     nb=2
if m<=0.93 and m>0.85:
     nb=3
if m>0.93:
     nb=4
print(nb)
```

2. En moyenne $1,32 \times 220 \times 45 = 13068$ euros par an.

74. 1. 6,6 euros en calculant l'espérance.

2. Si 800 clients n'ont pas vu leur facture baisser, cela donne une fréquence de 0,8.

Le graphique indique que les fréquences obtenues par simulation se situe autour de 0,6, dans une fourchette [0,5 ; 0,7].

Il peut donc douter des affirmations de l'entreprise ou au niveau du magasin.

75. 1. 0,12

2. Soit X la variable aléatoire donnant le gain en point après une ouverture de coffre.

D'après le graphique, on peut estimer :
$p(X = -5) = 0{,}5$; $p(X = 10) = 0{,}12$ et $p(X = 5) = 0{,}38$.

Alors $E(X) = 0{,}6 > 0$ donc elle a plutôt intérêt à ouvrir les coffres dans ce jeu.

76. On note X la variable aléatoire donnant la contenance de jus d'orange dans le verre.

1. Le deuxième pour avoir $p(X = 20) \approx 0{,}2$; $p(X = 30) \approx 0{,}5$ et $p(X = 40) \approx 0{,}3$.

2. $E(X) = 31$.

77. 1.

```
m=random.random()
if m<=0.7:
    x=-9
if m<=0.85 and m>0.7:
    x=2
if m<=0.95 and m>0.85:
    x=10
if m> 0.95:
    x=100
print(x)
```

2. $E(X) = 0$ qui correspond à la moyenne.
Donc c'est le premier graphique.

Travailler autrement

78. Pour But : $E(X) = -0{,}355$ et $\sigma(X) \approx 3{,}74$.

Pour As De Carte : $E(Y) = -0{,}63$ et $\sigma(Y) \approx 33{,}10$.

Le deuxième jeu fait perdre davantage d'argent en moyenne mais ses écarts de gain avec l'espérance sont plus marqués.

Exercices bilan p. 317

81. Pour comparer

1. On trouve :

x_i	5	0	–5	15
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{2}{15}$

2. $E(X) = 1$: on gagne en moyenne, sur un grand nombre de parties, 1 euro par partie.

3. On trouve :

y_i	$2m$	$-\frac{1}{2}m$	$-m$
$p(Y = y_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

4. On veut $E(Y) = \frac{2}{3}m - \frac{1}{6}m - \frac{1}{3}m \geqslant 1$.

On obtient $m \geqslant 6$.

5.

```
import random
m=random.random()
if m<=3/15:
    print("5")
if m<=7/15 and m>3/15:
    print("0")
if m<=13/15 and m>7/15:
    print("-5")
if m>13/15:
    print("15")
```

82. À la pêche

1. On trouve :

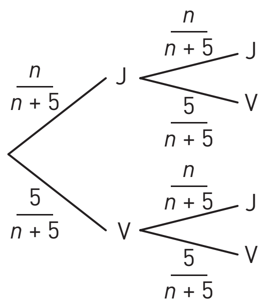
x_i	0	1	2	4
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

2. $E(X) = \frac{9}{7}$

3. Il a raison car $\frac{9}{7} \approx 1{,}3$.

83. Avec *n* boules

1.



2. a) On obtient :

x_i	-5	5	10
$p(X = x_i)$	$\frac{n^2}{(n+5)^2}$	$\frac{10n}{(n+5)^2}$	$\frac{25}{(n+5)^2}$

b) $E(X) = \frac{250 + 50n - 5n^2}{(n+5)^2}$

c) On veut $\frac{250 + 50n - 5n^2}{(n+5)^2} \leqslant 0$

$(n + 5)^2$ est strictement positif pour $n \geqslant 4$.

Pour $-5n^2 + 5n^2 + 50n + 250$, on a $\Delta = 7500$

Il y a deux racines : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-50 - \sqrt{50}}{-10} \approx 13{,}66$

et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-50 + \sqrt{50}}{-10} \approx -3{,}66$

$a = -5 < 0$, le signe est négatif pour $n \geqslant 14$.

84. Une inconnue

1. $E(X) = -10{,}5$

2. Il s'agit de résoudre

$-100p + 5(0{,}3 - p) + 10 \times \frac{1}{2} + 20 \times \frac{1}{5} = 4$

On trouve $p = \frac{13}{21}$

85. Durée sans panne

1. On trouve :

$p(X = 2) = \frac{1}{6}$, $p(X = 4) = \frac{1}{3}$ et $p(X = 5) = 0{,}5$.

2. Vrai.

3. $E(X) = \frac{25}{6}$ donc une durée moyenne d'environ 4,17.

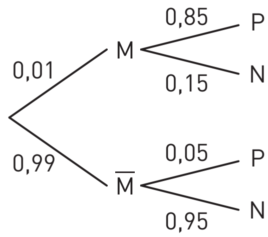
86. Maladie

1.

M : « L'animal est malade. »

P : «Le test est positif. »

N : « Le test est négatif. »



2. $p(M \cap P) = 0{,}01 \times 0{,}85 = 0{,}0085$.

3. X étant la variable aléatoire donnant le coût à engager pour un animal, on a :

x_i	0	10	1000
$p(X = x_i)$	0,9405	0,058	0,0015

Alors $E(X) = 2{,}08$.

Exercices d'approfondissement

p. 318-319

87. Sans remise (1)

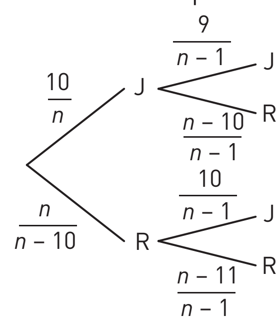
On pose X la variable aléatoire donnant le gain algébrique à ce jeu. On construit un arbre pondéré permettant d'obtenir le tableau suivant :

x_i	11	3	-5
$p(X = x_i)$	$\frac{11}{130}$	$\frac{56}{130}$	$\frac{63}{130}$

Alors $E(X) = -2$. On peut donc espérer perdre 200 euros sur 1000 parties.

88. Sans remise (2)

1. On peut construire l'arbre pondéré suivant.



On en déduit :

y_i	100	0	-10
$p(Y = y_i)$	$\frac{90}{n(n-1)}$	$\frac{20(n-10)}{n(n-1)}$	$\frac{(n-10)(n-11)}{n(n-1)}$

2. On veut $E(Y) = \dfrac{9000 - 10(n-10)(n-11)}{n(n-1)} \geqslant 0$.

$n(n-1)$ est strictement positif pour $n \geqslant 20$.

$9000 - 10(n-10)(n-11) = -10n^2 + 210n + 7900$ est positif pour $n \leqslant 40$.

L'espérance de Y peut être positive pour $n \leqslant 40$.

89. Tirage simultané

1. On obtient :

g_i	50	20	-10
$p(G = g_i)$	$\frac{1}{190}$	$\frac{36}{190}$	$\frac{153}{190}$

2. $E(G) = -4$

90. Trois à la suite

Soit Y la variable aléatoire donnant le gain de Yuri.

On construit un arbre pondéré résumant la situation et on obtient :

y_i	33	21	9	-3
$p(Y = y_i)$	0,001331	0,032307	0,261393	0,704969

$E(Y) = 0{,}96 > 0$, donc sur un grand nombre de parties, le jeu est à l'avantage de Yuri.

91. Avec *n* lancers

1. a) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^8 \approx 0{,}233$

b) Environ 0,767.

2. Il s'agit de résoudre $1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n \geqslant 0{,}95$.

Avec la calculatrice ou le tableur, on remarque qu'il faut 17 lancers.

92. Première sortie

X peut prendre les valeurs 1, 2 ou 3 et (par exemple avec un arbre de dénombrement) :

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$	$\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

93. Lancer de bille

La loi de probabilité de X est donnée par :

x_i	0	10	20
$p(X = x_i)$	$\frac{64}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{1}{81}$

La probabilité recherchée est donc égale à $\dfrac{\frac{8}{81}}{\frac{16}{81}} = \dfrac{1}{2}$

94. Formule de König-Huygens

1. 1

2. $V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \ldots + p_n(x_n - E(X))^2$

$= p_1x_1^2 - 2p_1x_1E(X) + p_1(E(X))^2$

$+ p_2x_2^2 - 2p_2x_2E(X) + p_2(E(X))^2 + \ldots$

$+ p_nx_n^2 - 2p_nx_nE(X) + p_n(E(X))^2$

$= p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \ldots + p_nx_n^2 + E(X)^2(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)$

$- 2E(X)(p_1x_1 + p_2x_2 + p_nx_n)$

$= p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \ldots + p_nx_n^2 + E(X)^2 - 2E(X)^2$

$= p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \ldots + p_nx_n^2 - E(X)^2$

95. Propriété de la variance (1)

A. Une conjecture

1. $E(Y) = 19$; $V(Y) = 1188$.

2. a) -8 ; 10 ; 20 et 200.

b) $V(Z) = 4752$

3. a) 16 ; -20 ; -40 et -400.

b) $V(Z') = 19008$.

4. $V(aY) = a^2V(Y)$.

5. On a :

ay_i	$-4a$	$5a$	$10a$	$100a$
$p(aY = ay_i)$	0,25	0,2	0,4	0,15

$E(Y) = -a + a + 4a + 15a = 19a$

$V(Y) = 0{,}25 \times (-4a)^2 + 0{,}2 \times (5a)^2 + 0{,}4 \times (10a)^2$
$+ 0{,}15 \times (100a)^2 - (19a)^2 = 1188a^2 = a^2V(Y)$

B. Cas général

$V(aX) = p_1(ax_1)^2 + p_2(ax_2)^2 + \ldots + p_n(ax_n)^2 - E(aX)^2$

$= a^2(p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + p_nx_n^2) - (aE(X))^2$

$= a^2(p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + p_nx_n^2 - E(X)^2)$

$= a^2V(X)$.

96. Propriété de la variance (2)

A. Une conjecture

Elle ne change pas quand on ajoute ou retranche un même nombre à toutes les valeurs que peut prendre X.

B. Cas général

$V(X + b) = p_1(x_1 + b - E(X + b))^2 + p_2(x_2 + b - E(X + b))^2 + p_n(x_n + b - E(X + b))^2$

$= p_1(x_1 + b - E(X) - b)^2 + p_2(x_2 + b - E(X) - b)^2 + \ldots + p_n(x_n + b - E(X) - b)^2$

$= p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x^2 - E(X))^2 + \ldots + p_n(x_n - E(X))^2 = V(X)$

97. Variance et transformation affine

1. $E(R) = 6$; $V(R) = 9V(X) = 51{,}84$ et $\sigma(R) = 7{,}2$.

2. $E(Y) = -8$; $V(Y) = 4V(X) = 23{,}04$ et $\sigma(R) = 4{,}8$.

98. Étude de $E(X - x)^2$

1. $E(X) = 0{,}2$ et $V(X) = 3{,}36$.

2. a) On a :

y_i	$(-2-x)^2$	$(-x)^2$	$(1-x)^2$	$(5-x)^2$
$p(Y = y_i)$	0,2	0,6	0,1	0,1

$$E(Y) = 0{,}2(-2-x)^2 + 0{,}6(-x)^2 + 0{,}1(1-x)^2 + 0{,}1(5-x)^2$$
$$= x^2 - 0{,}4x + 3{,}4.$$

b) Considérons la fonction de degré 2

$f : x \mapsto x^2 - 0{,}4x + 3{,}4$.

La parabole qui la représente est orientée vers le haut.

Son sommet a pour coordonnées $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = 0{,}2$ et $\beta = f(\alpha) = 3{,}36$.

Le minimum est obtenu pour $x = 0{,}2$.

c) Le minimum est 3,36.

99. Marche aléatoire

1. Les valeurs entières entre –10 et 10 inclus.

2. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10} \approx 1{,}69 \times 10^{-5}$ (il faut que l'ordonnée augmente de 1 à chacune des 10 étapes).

3.

```
import random
def simulation():
    y=0
    for i in range(10):
      m=random.random()
      if m<=1/3:
        y=y+1
      if m<=2/3 and m > 1/3:
        y=y-1
    return y
```

4. Environ 0,82 à l'aide de simulations.

100. Péréquation affine

1. $E(X) = 2{,}7$ et $V(X) = 1{,}41$.

2. À l'aide des propriétés de l'espérance et de la variance, on a $E(aX + b) = 2{,}7a + b = 3$ et

$V(aX + b) = a^2 \times 1{,}41 = 1$.

On trouve $a \approx 0{,}84$ et $b \approx 0{,}73$.

Vers la Tle

101. 1. X peut prendre les valeurs entières supérieures ou égales à 1.

2. À l'aide d'un arbre pondéré : $\dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{16}$

3. $p(X = k) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{4}$

102. 1. [0 ; 240].

2. a) Noé attend entre 60 et 150 minutes.

b) $p(60 \leqslant X \leqslant 150) = \dfrac{90}{240} = \dfrac{3}{8}$

3. 0.

Travaux pratiques p. 320-325

TP1. Espérance, variance et écart-type avec la calculatrice

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** utiliser les fonctionnalités de la calculatrice permettant de calculer rapidement les espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire.

2. $V(X) = 50{,}9475$.

3. $E(Y) = 0{,}22$; $\sigma(Y) \approx 32{,}15$ et $V(Y) \approx 1033{,}62$.

TP2. Simuler une variable aléatoire avec Python

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** comprendre le fonctionnement d'un programme généraliste permettant de simuler des variables aléatoires à partir de listes précisant sa loi de probabilité.

2. b) Il affiche des valeurs au hasard suivant la loi de probabilité de la variable aléatoire.

3. Il suffit de changer les listes en utilisant :

x_i	-4	1	2	100
p_i	0,56	0,41	0,02	0,01

TP3. Simuler une variable aléatoire avec tableur

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Obtenir une simulation d'une variable aléatoire avec le tableur.

A. Création d'une simulation

1. La probabilité qu'elle mette entre 4 et 6 paniers est 0,15, c'est-à-dire la même que le nombre aléatoire (entre 0 et 1) soit compris entre 0,55 et 0,7. Dans ce cas, elle gagnera 10 euros.

2. =SI(B2>0,9;50;0)

3. Le nombre aléatoire 0,88504… est compris entre 0,7 et 0,9. La simulation dit qu'Ophélie a mis entre 7 et 10 paniers : elle gagne donc 30 euros.

4.

5. =MOYENNE(H2:H101) pour 100 simulations.

B. Création d'un échantillon

1. On a :

x_i	-5	10	30	50
$p(X = x_i)$	0,55	0,15	0,20	0,10

2. On calcule l'espérance de X.

$E(X) = 9{,}75$.

Les moyennes observées sur les simulations sont proches de cette valeur. On pourra aussi faire remarquer que, lorsque le nombre de simulations augmente, les moyennes observées semblent plus proches de la valeur de $E(X)$.

TP4. Espérance, variance, écart-type et fonction Python

- **Durée estimée :** 35 min
- **Objectif :** comprendre le fonctionnement d'un programme et le compléter afin qu'il calcule les indicateurs d'une variable aléatoire.

Dans ce TP, les nombres demandés, notamment les probabilités, dans le programme **Python** ne peuvent pas être écrits sous forme de fraction.

2. Il affiche 5,2 qui est l'espérance de X, ce que l'on peut vérifier par le calcul : $-2 \times 0{,}2 + \ldots + 10 \times 0{,}5$.

3. La première boucle **`for`** permet de rentrer successivement les n valeurs et les n probabilités.

La deuxième boucle **`for`** permet de calculer la somme des x_ip_i.

4. Par exemple :

```
import math

def esperance_var(n):
    liste_x=[]
    liste_proba=[]
    for i in range(n):
        a=float(input("saisir la valeur
        de X"))
        liste_x.append(a)
        b=float(input("saisir la
        probabilité P"))
        liste_proba.append(b)
    somme=0
    for k in range(n):
        somme=somme+(liste_x[k])*
        (liste_proba[k])
    return(somme)

def indicateur_var(n):
    liste_x=[]
    liste_proba=[]
    for i in range(n):
        a=float(input("saisir la valeur
        de X"))
        liste_x.append(a)
        b=float(input("saisir la
        probabilité P"))
        liste_proba.append(b)
    somme=0
    for k in range(n):
        somme=somme+(liste_x[k])*
        (liste_proba[k])
    espe=somme
    somme2=0
    for k in range(n):
        somme2=somme2+((liste_x[k]-espe)
        **2)*(liste_proba[k])
    variance=somme2
    ecty=math.sqrt(variance)
    print(espe,variance,ecty)
    return()

indicateur_var(4)
```

5. Il donne $E(Y) \approx 32{,}739999...$ (pour 32,74), $V(Y) \approx 313{,}57$ et $\sigma(Y) \approx 17{,}708$.

6. Il affiche : environ 4,33 pour l'espérance ; 37,55 pour la variance et 6,128 pour l'écart-type (en saisissant 0,1333 pour $\frac{2}{15}$, les valeurs sont approchées).

TP5. Création et étude d'un échantillon

• **Durée estimée :** 60 min

• **Objectif :** Générer une simulation avec Python et créer des outils (fonction moyenne, fonction écart-type) permettant d'analyser la simulation (par exemple, sur la distance entre la moyenne d'un échantillon et l'espérance de la variable aléatoire). Ce TP peut s'appuyer sur le TP4 pour certains points.

A. Création d'une simulation

Une correction possible pour les parties A, B et C :

```
import math
import random

def gain():
    aleatoire=random.random()
    if aleatoire<=0.5:
        g=95
    if aleatoire<=0.72 and aleatoire>0.5:
        g=0
    if aleatoire>0.72:
        g=-10
    return g

def moyenne(liste):
    somme=0
    n=len(liste)
    for k in range(n):
        somme=somme+liste[k]
    moy=somme/n
    return moy

def ecarttype(liste):
    m=moyenne(liste)
    n=len(liste)
    somme=0
    for k in range(n):
        somme=somme+(liste[k]**2)
    e=math.sqrt(1/n*somme-m**2)
    return e

echantillon1=[gain() for i in range(1000)]

print(echantillon1.count(95))
print(echantillon1.count(0))
print(echantillon1.count(-10))

print(moyenne(echantillon1))
print(ecarttype(echantillon1))
```

B. Création d'un échantillon

1. Il affiche une liste de (1000) nombres obtenus au hasard suivant la situation. Si on relance, il produit une autre liste.

2. Il correspond au nombre d'occurences du nombre 95 dans la liste echantillon1.

3. Il suffit de rajouter : **`print(echantillon1.count(0))`** et **`print(echantillon1.count(–10))`**

4. Oui car sur 1 000 simulations, la fréquence d'apparition du 95 est proche de 0,5, celle du 0 est proche de 0,22 et celle du – 10 est proche de 0,28.

5. Ils sont proches des précédents.

C. Fonction moyenne et D. Fonction écart-type

Voir ci-dessus.

E. Bilan et observation

1. a) On obtient, par exemple :
moyenne ≈ 45,46 et $\sigma \approx 50{,}53$.

b) Par exemple, on obtient :
moyenne ≈ 45,01 et $\sigma \approx 50{,}31$.

2. a) On trouve $E(X) = 44{,}7$ et $\sigma(X) \approx 50{,}42$.

3. On pourra faire remarquer que les résultats observés sont très proches des valeurs de l'espérance et de l'écart-type dans le cas $n = 10\,000$.

TP6. Dispersion des valeurs autour de l'espérance

• **Durée estimée :** 60 min

• **Objectif :** Comprendre des programmes permettant d'analyser des simulations. Les utiliser et les modifier afin d'observer la dispersion des moyennes relevées pour des échantillons simulés par rapport à l'espérance d'une variable aléatoire.

1. `simulation` : permet d'obtenir des valeurs au hasard suivant la loi de probabilité définie par les deux listes à fournir (pour les valeurs et les probabilités) d'une variable aléatoire.

`moyenne_tableau` : permet de calculer la moyenne d'une série statistique donnée dans un tableau d'effectifs ou de fréquences.

`moyenne_liste` : permet de calculer la moyenne d'une série définie par une liste de nombre

`ecarttype` : permet de calculer l'écart-type d'une série statistique donnée dans un tableau d'effectifs ou de fréquences.

2. $E(X) = 4$ et $\sigma(X) \approx 55{,}26$ en utilisant les fonctions **`moyenne_tableau`** et **`ecarttype`**.

3. b) Autour de 4 (entre –2 et 10 environ).

c) Il suffit de modifier le 500 en n dans la fonction.

4. a) $\mu = 4$, $\sigma - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \approx -0{,}94$ et $\mu + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \approx 8{,}94$

ce qui semble cohérent avec le graphique.

b) Il y a 300 échantillons, dont 288 vérifient la condition, c'est-à-dire 96 %.

c) Cela dépend du graphique obtenu.

5. a) Il suffit de modifier les 500 en n dans la fonction.

b) L'amplitude de l'intervalle diminue lorsque n augmente. Les moyennes sont de plus en plus proches de 4.

c) On peut douter de son résultat ou de ce qu'il a fait. Une moyenne égale à 18 ne semble pas arriver dans les simulations d'échantillons de taille 500 effectuées.

En autonomie p. 326

Définir et utiliser une variable aléatoire

103. **b**

104. **c**

105. **c**

106. 1. $\frac{4}{11}$

2. $p(Y < 0) = \frac{5}{11}$ et $p(Y > 0) = \frac{6}{11}$.

107.

X, la variable aléatoire donnant le gain algébrique à ce jeu, peut prendre les valeurs 10 ou –2.

x_i	–2	10
$p(X = x_i)$	$\frac{7}{n}$	$\frac{n-7}{n}$

108. $p(X \geqslant 41) = 0{,}51$

109. $p(X = 10) = 0{,}23$

Obtenir et utiliser une simulation

110. **c**

111. **a**

112.

```
def simul_piece():
    alea=random.random()
    if alea<=0.125:
        nombre=0
    if alea<=0.5 and alea>0.125:
        nombre=1
    if alea<=0.875 and alea>0.5:
        nombre=2
    if alea>0.875:
        nombre=3
    return nombre
```

113

```
def moyenne(n):
    echantillon=[simul_piece() for i
    in range(n)]
    somme=0
    for k in range(n):
        somme=somme+echantillon[k]
    moyen=somme/n
    return moyen
```

Calculer, interpréter et utiliser une espérance

114. **b**

115. **b** et **c**

116. Oui car $E(X) = 0$.

117. 1.

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

2. $\frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

118. $a = -1{,}7$

119. 1. $E(Y) = E(X) - 3 = -4$

2. Elle est égale à –2,5.

120. 42 jetons

Calculer et utiliser les indicateurs d'une variable aléatoire

121. b

122. b

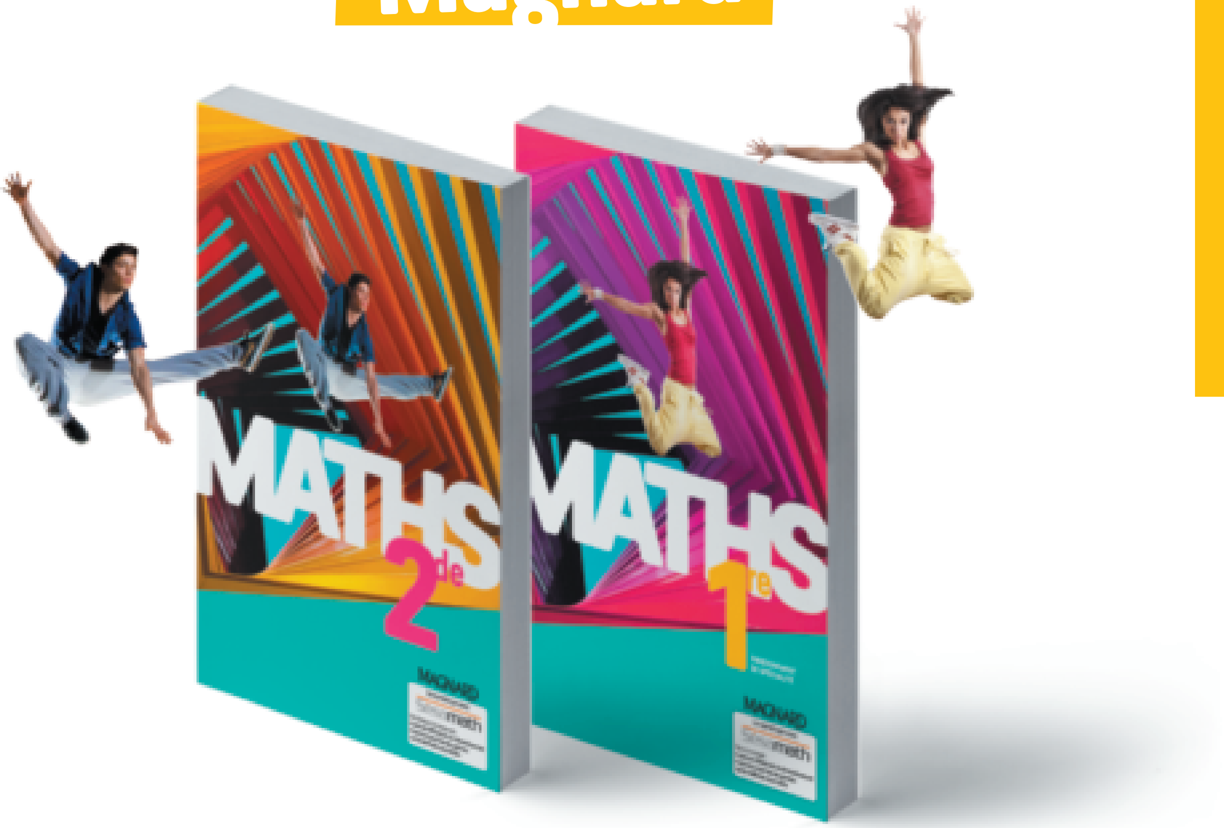
123. d

124. Pour le jeu 1, l'espérance est environ −1,33 et l'écart-type est environ 149.

Pour le jeu 2, l'espérance est −8,5 et l'écart-type est environ 996.

125. $V(X) = \frac{1}{8} \times (0 - 1{,}5)^2 + \frac{3}{8} \times (1 - 1{,}5)^2 + \frac{3}{8} \times (2 - 1{,}5)^2 + \frac{1}{8} \times (3 - 1{,}5)^2 = 0{,}75.$

Toute la collection Magnard



9 782210 112797

Cet ouvrage a été imprimé sur du papier provenant de forêts gérées durablement.

MAGNARD
www.magnard.fr